

Programme de colle de la semaine n°7 du 15/10 au 20/10

Nombres complexes

Question de cours

1. Inégalité triangulaire pour le module (pas l'égalité).
2. $\cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ avec la partie réelle de $(\cos x + i \sin x)^3$.
3. simplification de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ (attention au cas $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$)
4. racines n -ièmes de l'unité : $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{i2k\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$.
5. Nature géométrique de $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = (1+i)z + (3-4i)$.

Exercices uniquement sur les nombres complexes

On interroge sur le chapitre :

Nombres complexes**1 Généralités**

1. Écriture algébrique $z = x + iy$, point de vue géométrique (affiche d'un point ou d'un vecteur). Conjugué, module et leurs propriétés. Inégalité triangulaire.
2. Argument, écriture exponentielle $z = re^{i\theta}$, propriétés.

2 Quelques applications «algébriques»

1. *Technique de l'angle moitié* : $1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) = e^{i\theta/2}2 \cos(\theta/2)$.
2. Polynômes de Tchebychev : écriture de $\cos nx$ comme un polynôme en $\cos x$.
3. Linéarisation d'expressions trigonométriques (on transforme un produit en une somme). C'est utile par exemple pour calculer des intégrales ou des dérivées n -ièmes.
4. Sommes trigonométriques : simplification de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ (attention au cas $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$).

3 Résolutions d'équations algébriques

1. Racines n -ièmes de l'unité : $\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{i2k\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$. La somme des racines n -ièmes de l'unité est nulle (pour $n \geq 2$). Représentation géométrique.
Cas des racines cubiques de l'unité : $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$, $j^3 = 1$, $\bar{j} = j^2$ et $1 + j + j^2 = 0$.
2. Racines n -ièmes d'un nombre complexe, tout nombre complexe non nul admet n racines n -ièmes.
3. Equations du second degré. Somme et produit des racines $(X - u)(X - v) = X^2 - \underbrace{(u + v)}_S X + \underbrace{uv}_P = X^2 - SX + P$.

4 Géométrie

1. Quelques outils de type «dictionnaire» (correspondance entre les langages algébrique et géométrique)

On a (attention l'ordre des lettres est inversé)

$$\left| \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right| = \frac{CD}{AB} \quad \text{et} \quad \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$$

Application aux problèmes d'alignement ou d'orthogonalité.

2. Écriture complexe des similitudes directes : cas particulier des translations, rotations, homothéties. Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az + b$.

5 Exponentielle complexe

Si $z = x + iy$, on pose $\exp(z) = e^x e^{iy}$.

Module, argument, propriété de morphisme, équation $e^z = a$.