Programme de colle n°4 de la semaine n°6 du 08/10 au 12/10

1 Questions de cours

1. Si f est dérivable en a alors f est continue en a. Réciproque fausse.
2. monotonie de $f : x \mapsto x^x$ à l'aide de la dérivée, ainsi que les limites en 0 et $+\infty$.
3. Étude de la fonction th (dérivée, variations, limites, convexité sur $\mathbb{R}^+$, graphe, position par rapport à sa tangente en 0).
4. la fonction $\frac{1}{\text{ch}}$ admet un unique point fixe dans $\mathbb{R}$

2 Exercices

Chapitre V: Pour démarrer en analyse

2.1 Généralités sur les fonctions

1. Vocabulaire : image, antécédent, ensemble d'arrivée, ensemble image
2. Représentation graphique d'une fonction
3. Symétries : parité, périodicité, centre de symétrie
4. Composée de fonctions

2.2 Monotonie

Définitions, composée de fonctions monotones, somme de fonctions croissantes..

2.3 L'outil dérivation

1. Définitions : nombre dérivé en a, fonction dérivée, tangente en un point.
2. Opérations sur les dérivées, dérivée d'une composée
3. Caractérisation de la monotonie pour les fonctions dérivables
4. Dérivée n-ième, stabilité par CL, produit, quotient, composée. Formule de dérivation de Leibniz
5. Définition provisoire de fonction convexe : fonction dérivable de dérivée croissante. Sa courbe est au-dessus des tangentes.

2.4 Allure d'une courbe de fonction tendant vers l'infini

Différentes branches infinies : asymptotes à une droite, branches paraboliques. Comparaison à la fonction étalon $x \mapsto x$ par la limite de $\frac{f(x)}{x}$.

2.5 Autour du théorème des valeurs intermédiaires

1. Notion de continuité. Dérivable implique continue
2. Théorème des valeurs intermédiaires.

2.6 Quelques fonctions usuelles

1. Les fonctions polynomiales et fonctions rationnelles
2. Les deux célèbres fonctions réciproques : ln et exp. Inégalités de convexité $\ln x \leqslant x-1$ et $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$.
3. Fonctions puissances. Définition de $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$ avec $x>0$ et α réel. Règles de calculs. Étude des fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$. Croissances comparées.
4. Les fonctions hyperboliques (mais pas les réciproques qui ne sont pas au programme).

2.7 Un nouvel outil pour les limites : les équivalents

1. Notion de fonctions équivalentes en a. C'est une relation d'équivalence. Cas des fonctions polynomiales en $+\infty$ et en 0.
2. Équivalents usuels en 0
3. Propriétés : produit et quotients d'équivalents. Deux fonctions équivalentes ont la même limite (si elle existe). $(1+\frac{1}{n})^n$ tend vers e.

Attention :

- ne pas parler encore de bijection et de fonction réciproque. Traité dans un prochain chapitre

,

Fin du programme de la semaine

Savoir faire

- Je sais montrer qu'une courbe de fonction admet un centre ou un axe de symétrie.
- Je sais qu'une composée de fonctions monotones est monotone, qu'une somme de fonctions croissantes est croissante.
- Je sais justifier qu'une fonction est dérivable à l'aide des opérations (attention avec la composée dans le cas où il y a une fonction «méchante» du type racine carrée...)
- Je sais ce qu'est un nombre dérivé $f'(a)$ (limite **finie** du taux d'accroissement) et que cela représente le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a.
- Je sais tester si une fonction est dérivable en a en cherchant la limite en 0 de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
- Je sais calculer des dérivées (je me suis bien entrainé...). Parfois je dois transformer l'écriture pour les calculs soient plus simples (transformer en somme ou utiliser des puissances).
- Je connais la formule de Leibniz pour calculer la dérivée n-ième d'un produit.
- Je sais prouver qu'une fonction (dérivable) est convexe et obtenir des inégalités avec la tangente.
- Si une fonction vers $+\infty$ en $+\infty$, je la compare à x en cherchant la limite l de $\frac{f(x)}{x}$. Si $l=+\infty$, $f(x)$ est prépondérante devant x, si $l=0$ c'est le contraire, si $l\in\mathbb{R}^*$, on cherche la limite de $f(x)-lx$, il y aura peut-être une asymptote oblique.
- Je connais la définition de la continuité : une fonction f est continue en a si la limite de f en a vaut $f(a)$.
- Je sais que si f est dérivable en a, alors f est continue en a. Je sais de plus que la réciproque est fausse : racine carrée et valeur absolue sont continues mais ne sont pas dérivables en 0.
- Je connais le TVI et donc ses hypothèses : continuité et intervalle... (deux formulations possibles : une fonction continue sur un intervalle qui change de signe s'y annule ou une fonction continue sur $[a,b]$ prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$)
- Je sais que pour prouver l'existence d'une solution, je peux me ramener à une équation du type $f(x)=0$, montrer que f change de signe (penser à regrder les limites parfois) et conclure avec le TVI.

  Dans certains cas, la solution est unique, on le justifie en montrant que f est strictement monotone.
- Pour montrer qu'une fonction f admet un point fixe, on peut montrer que l'équation $f(x)-x=0$ admet une solution.
- Je sais tracer les fonctions ln et exp et je connais les propriétés qui s'y rattachent.
- Je sais donner un sens à x^α même lorsque $\alpha\in\mathbb{R}$ n'est pas un entier. On pose pour $x>0$, $x^\alpha=\exp(\alpha\ln x)$.
- La fonction «puissance alpha» $f_\alpha : x\mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ avec $f'_\alpha(x)=\alpha x^{\alpha-1}$.
- Je sais tracer l'allure des courbes des fonctions «puissance alpha» selon la valeur de α, 3 cas : $\alpha>1$ (modèle x^2) , $\alpha\in]0,1[$ (modèle $\sqrt{x}$=, $\alpha<0$ (modèle $\frac{1}{x}$)
- Pour dériver ou chercher une limite d'une fonction du type $f(x)=u(x)^{v(x)}$ (exposant dépend de la variable x), je mets sous la forme $\exp(v(x)\ln u(x))$.
- Je connais les limites de «croissances comparées» entre $\ln x, \exp(x)$ et x^α.
- Je sais tracer les fonctions ch et sh (je sais que $\mathrm{ch}'=\mathrm{sh}$ et que $\mathrm{sh}'=\mathrm{ch}$).
- Je sais que $\mathrm{ch}^2-\mathrm{sh}^2=1$.
- Je sais que $\mathrm{th}=\frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$ et que $\mathrm{th}'=1-\mathrm{th}^2=\frac{1}{\mathrm{ch}^2}$.