

**Programme de colle de la semaine n°4 du 23/09 au 28 /09**

## Démonstrations de cours

- Si  $0 \leq a \leq b$  et  $0 \leq c \leq d$ , alors  $ac \leq bd$ . Le résultat ne subsiste pas si les nombres sont de signe quelconque.
- $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$
- $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$  par récurrence
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \left(\frac{j(j+1)}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1) = \dots$
- Formule du triangle de Pascal (uniquement cas où  $0 \leq k \leq n-1$ )
- Formule du binôme de Newton
- $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$  en dérivant de deux façons différentes la fonction  $f : x \mapsto (1+x)^n$
- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k+1} 3^k = \frac{4^n - 1}{3}$

## Exercices

On pourra interroger sur les chapitres 2. et 3.

- Calculer et comparer dans un monde numérique
- Calcul binomial

Le résumé est ci-dessous et le détail du cours se trouve à cette adresse de la page suivante <http://desaintar.free.fr/chapitres.php>.

## I Quels nombres dans un monde numérique ?

1. Les différents ensembles de nombre :  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .
2. Décomposition d'un entier en base 2
3. Densité des rationnels et des irrationnels parmi les réels

## II Quelques techniques pour comparer des nombres

1. Opérations sur les inégalités
2. Utilisation de tableau de signes, d'études de fonctions
3. Valeur absolue et inégalité triangulaire
4. Quelques inégalités classiques :
  - $\forall x \geq 0, \sin x \leq x$
  - $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$
  - $\forall x > 0, \ln x \leq x - 1$  et  $\forall x > -1, \ln(1 + x) \leq x$ .
  - $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

## III Quelques techniques sur les sommes

1. Utilisation du symbole sigma
2. Quelques sommes classiques : sommes géométriques, somme des entiers de 1 à  $n$  et somme de leurs carrés. Factorisation de  $a^n - b^n$  par  $a - b$
3. Initiation au changement d'indice, séparation des termes d'indice pair et impair
4. Sommes à double indice

## IV Coefficients binomiaux, binôme de Newton

1. Définition avec les factorielles, propriétés de symétrie et triangle de Pascal
2. Le nombre  $\binom{n}{k}$  est le nombre de parties à  $k$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments.
3. Formule du binôme de Newton, somme des  $\binom{n}{k}$  et des  $(-1)^k \binom{n}{k}$