Programme de colle semaine 34 du 17/06 au 21/06

«Séries numériques»

Questions de cours

1. Nature et somme d'une série géométrique
2. Si une série converge, son terme général tend vers 0.
3. Règles des équivalents pour des séries à termes positifs.
4. Si (a_n) décroît et tend vers 0, la série $\sum(-1)^n a_n$ converge.
5. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ diverge.

I Notion de série numérique

Les séries sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La principale différence avec ce nouveau programme est qu'il y a le critère spécial sur les séries alternées.

1. Premières définitions : notion de somme partielle, de reste de rang n
2. Séries de référence : géométriques, série exponentielle
3. Condition nécessaire de convergence : le terme général tend vers 0. Combinaison linéaire de série, lien suite série. Série à valeurs complexes.

II Série à termes positifs

1. Régle de comparaison, règle des équivalents (**attention la règle de D'Alembert et la «règle n^α» ne sont pas au programme de MPSI**).
2. Comparaison série intégrale dans le cas d'une fonction monotone, positive et continue.
3. Série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

III Comment faire si la série n'est pas à termes positifs ?

1. Convergence absolue. Elle implique la convergence de la série. Réciproque fausse.
2. Critère spécial des séries alternées : si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante qui tend vers 0, alors la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ converge
3. on peut tenter un développement asymptotique de u_n, pour écrire la série comme une combinaison linéaire de séries dont on connaît la nature.