Programme de colle S33 du 10 juin au 14 juin

«Déterminants»

I Questions de cours

1. Pour $n = 3$, connaître la règle de Sarrus en explicitant les 6 permutations de $\mathcal{S}_3$ dans la formule $\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)x_{\sigma(1)1}\dots x_{\sigma(n)n}$.
2. Si deux matrices sont semblables, elles ont même déterminant. Réciproque fausse.
3. soit A une matrice à coefficients entiers de taille n telle que $A^3 = 2A^\top$. Démontrer que si n est impair, A n'est pas inversible (on a $(\det A)^3 = 2^n \det A$ et donc si $\det A \neq 0$, $\det A = \pm 2^{n/2} \notin \mathbb{Z}$, contradiction car A à coeff entiers)
4. déterminant de Vandermonde (méthode avec la factorisation du polynôme $x \mapsto V(x_0, x_1, \dots, x_n, x)$).

II Cours sur les déterminants

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

II.1 Motivation

1. Deux exemples de déterminant : l'aire d'un parallélogramme et le volume d'un pavé
2. Facteur d'amplification des volumes par un endomorphisme cas $n = 2$

II.2 Groupe symétrique

Une permutation de $[\![1, n]\!]$ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. L'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ muni de la composition est un groupe, appelé groupe symétrique, noté $\mathcal{S}_n$. Il possède $n!$ éléments.

1. Notion de transposition, de cycles.
2. Toute permutation peut s'écrire comme une composée de transpositions ou de cycles à supports disjoints.

   Deux cycles à support disjoints commutent. La relation de «Chasles» suivante peut être utile :

   $$(a_1a_2\dots a_p) = (a_1a_2)(a_2a_3)\dots(a_{p-1}a_p).$$

3. Signature d'une permutation.

   La signature d'une transposition vaut -1. La signature d'une composée est le produit des signatures (c'est un morphisme de groupe), on en déduit avec «Chasles» que la signature d'un cycle d'ordre p vaut $(-1)^{p-1}$.

Méthode : pour calculer la signature d'une permutation, on peut la décomposer en produit de cycles à supports disjoints, et utiliser le morphisme signature, sinon, on décompose en produit de transpositions, la signature vaut alors $(-1)^k$ où k est le nombres de transpositions.

II.3 Définition des déterminants

1. **Applications p-linéaires alternées.**

   De plus, si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée, alors $f(u_1, \dots, u_p) = 0$.

   Enfin si σ est une permutation de $[\![1, p]\!]$, pour toute famille $(u_1, \dots, u_p)$, on a $f(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, \dots, u_p)$.

2. **Théorème fondamental :** si $\dim E = n$, l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1. Plus précisément si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, l'application $\det_{\mathcal{B}}$ définie par

   $$\boxed{\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \dots x_{\sigma(n)n}}$$

   est l'unique forme n-linéaire alternée sur E, vérifiant $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$. Toutes les autres formes n-linéaires alternées sur E sont proportionnelles à $\det_{\mathcal{B}}$.

3. **Déterminant d'une famille de vecteurs :** le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est le déterminant de la famille de vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Moralement, ce déterminant mesure le volume engendré par les vecteurs $x_1, \dots, x_n$, en prenant pour volume de référence celui engendré par la base $\mathcal{B}$, qui est égal à 1.

   Remarque : pour $n = 2$ on retrouve l' expression du déterminant vu pour les matrices de taille 2. Le déterminant de x_1 et x_2 représente alors l'aire algébrique du parallélogramme construit sur x_1 et x_2.

   Pour $n = 3$, connaître la règle de Sarrus en explicitant les 6 permutations de $\mathcal{S}_3$ dans la formule $\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \dots x_{\sigma(n)n}$. Le déterminant de (x_1, x_2, x_3) est le volume du parallélépipède construit sur x_1, x_2 et x_3.

   Deux propriétés :

   - Formule de changement de base (relation de Chasles) : soit β et β' deux bases de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Si $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs de E, on a :

     $$\boxed{\det_{\beta}(\mathcal{F}) = \det_{\beta}(\beta') \det_{\beta'}(\mathcal{F})}.$$

   - Caractérisation des bases par le déterminant :
     $\boxed{\text{une famille de } n \text{ vecteurs de } E\ (\dim E = n) \text{ est une base ssi son det (dans une base) est no}}$

   Exemple : Déterminer les réels a tels que la famille $(X^2, a(X-1)^2, a^2X^2 + aX + 1)$ soit une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

4. **Déterminant d'un endomorphisme** :

   Si f est un endomorphisme de E, le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie. On l'appelle le déterminant de f. Pour calculer le déterminant d'un endomorphisme, il suffit donc de choisir une base $\mathcal{B}$, alors $\boxed{\det f = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))}$.

   Moralement, $\det f$ est le *facteur d'amplification des volumes* par f.

   En effet, si $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs de E, on a :

   $$\boxed{\det_{\beta}(f(\mathcal{F})) = \det f \det_{\beta}(\mathcal{F})}.$$

   Les exemples suivants sont naturels, $\det(\mathrm{id}_E) = 1$, et le déterminant de l'homothétie de rapport k vaut k^n.

5. **Déterminant d'une matrice carrée**. C'est le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

   Si A est la matrice d'un endomorphisme f dans une certaine base, alors $\det f = \det A$.

   Pour calculer le déterminant d'un endomorphisme, il suffira donc de choisir une base, d'écrire la matrice associée et de calculer son déterminant. Évidemment, il peut y avoir des choix de base qui facilitent les calculs.

   En particulier, cela montre que $\boxed{\text{deux matrices semblables ont même déterminant}}$.

II.4 Propriétés algébriques des déterminants

Si f et g sont deux endomorphismes de E de dimension n et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

1. $\boxed{\det(\lambda f) = \lambda^n \det f}$

2. $\boxed{\det(f \circ g) = \det f \det g}$

3. $\boxed{f \text{ est inversible ssi } \det f \neq 0 \text{ et dans ce cas } \det f^{-1} = \frac{1}{\det f}}$.

Il faut savoir traduire matriciellement ces propriétés. On peut alors retrouver que deux matrices semblables ont même déterminant.

On a aussi $\boxed{\text{la transposition conserve le déterminant}}$.

Exercice : soit A une matrice à coefficients entiers de taille n telle que $A^3 = 2A^\top$. Démontrer que si n est impair, A n'est pas inversible.

Enfin, le déterminant d'une **matrice triangulaire** est le produit de ses coefficients diagonaux.

II.5 Méthodes de calcul des déterminants

1. Opérations sur les lignes et les colonnes.

   - l'échange de deux lignes $L_i \leftrightarrow L_j$ multiplie le déterminant par -1.
   - la multiplication d'une ligne par un scalaire λ, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ multiplie le déterminant par λ
   - l'ajout à une ligne d'un multiple d'une autre ligne (transvection) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ conserve le déterminant.

   Elles permettent par exemple à l'aide de l'algorithme de Gauss de se ramener à un déterminant triangulaire. **Penser à factoriser** lorsque c'est possible.

2. Développement suivant une ligne ou une colonne.

   On note $\Delta_{i,j}(A)$ le **mineur** associé au coefficient $a_{i,j}$, c'est-à-dire le déterminant extrait de A en supprimant la ligne n°i et la colonne n°j. On a alors en développant par rapport à la ligne n°i :

   $$\boxed{\det A = \sum_{j=1} a_{i,j}(-1)^{i+j}\Delta i, j(A)}.$$

   En particulier, on retrouve que le déterminant d'une **matrice triangulaire** est le produit de ses coefficients diagonaux.

   Le développement suivant une ligne ou une colonne peut être est pratique pour obtenir par exemple des relations de récurrence...

   Une application : déterminant de Vandermonde (méthode avec la factorisation du polynôme $x \mapsto V(x_0, x_1, \dots, x_n, x)$).

II.6 Compléments

1. Comatrice.

   La comatrice de A est la matrice dont les coefficients sont les **cofacteurs** de A, c'est-à-dire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$.

   On a :
   $$\boxed{A \times (\operatorname{com} A)^\top = (\operatorname{com}(A))^\top \times A = (\det A)I_n}$$

   et on en déduit lorsque A est inversible :

   $$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\operatorname{com}(A))^\top}.$$

   Mis à part pour la taille 2, cette formule théorique n'est pas pratique pour calculer l'inverse d'une matrice (elle nécessite n^2 calculs de déterminants de taille $n-1$, chacun de ces déterminants pouvant être calculés en $O(n^3)$, on obtient une complexité en n^5), on préfèrera la méthode du pivot de Gauss de complexité n^3. Elle exprime toutefois que les coefficients de la matrice A^{-1} sont des fractions rationnelles en les coefficients de la matrice A.

2. Déterminant triangulaire par blocs :

   On prend A et B des matrices carrées, alors

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \times \det B$$

3. Systèmes linéaires

   - Écriture matricielle d'un système linéaire. Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, soit le système $AX = Y$ n'admet pas de solution, soit ses solutions forment un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ de direction $\operatorname{Ker} A$.
   - Système de Cramer : c'est un système linéaire de matrice carrée qui admet une unique solution. Un système est de Cramer ssi son déterminant associé est non nul. Formule théorique donnant les solutions d'un sytème de Cramer à l'aide de déterminants : si $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ est la solution du système $AX = Y$, alors $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$ où A_j est la matrice de A dans laquelle la $j-$ième colonne est remplacée par la colonne Y. Mise à part en taille 2, cette formule n'est pas pratique pour résoudre des systèmes, où l'on préfèrera la méthode du pivot de Gauss.

4. Calcul du rang à l'aide du déterminant :

   Si une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ admet un déterminant extrait non nul de taille p, alors $\operatorname{rg}(A) \geqslant p$. On en déduit que

   $\boxed{\text{le rang de } A \text{ est égal à la taille du plus grand déterminant } \textbf{non nul} \text{ extrait de } A}$.

5. Calcul de valeurs propres à l'aide du polynôme caractéristique (hors-programme).

   Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose pour tout $t \in \mathbb{K}$, $\chi_A(t) = \det(A - tI_n)$. On définit ainsi un polynôme appelé polynôme caractéristique de A.

   Si $n = 2$, on a $\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{Tr}(A)X + \det A$ qui est un polynôme annulateur [1]. de A.

   Les racines de ce polynôme fournissent des vecteurs «propres» pour A, utiles pour la réduction de A.

1. Vous verrez l'année prochaine que ce résultat est valable en taille quelconque : c'est le théorème de Cayley-Hamilton qui affirme que le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.