

Programme de colle semaine 32 du 03/06 au 07/06

«Probabilités»

I Questions de cours

1. Formule des probas totales
2. si A et B sont indépendants les évènements A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B , $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.
3. Espérance d'une loi binomiale en calculant $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ avec $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
4. Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ avec le théorème de transfert appliqué au vecteur aléatoire $V = (X, Y)$ et la fonction $(x, y) \mapsto xy$.
5. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $E(X_1 \dots X_n) = E(X_1) \dots E(X_n)$ par récurrence sur n .
6. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice aléatoire dont les coefficients sont indépendants et suivent une même loi de Rademacher (elles prennent les valeurs 1 et -1 avec proba $\frac{1}{2}$). Alors $E(\det(M)) = 0$ et $V(\det M) = 2$.
7. Si X et Y sont indépendantes et suivent une loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$, alors $P(X = Y) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$.

II Espaces probabilisés finis

Dans tout ce chapitre Ω sera un ensemble **fini**. En deuxième année, Ω pourra être infini.

II.1 Espaces probabilisés

1. Vocabulaire : univers fini, évènements, système complet d'évènements, variable aléatoire.
2. Notion de probabilité : définition, propriétés, distribution de probabilités, cas de l'équiprobabilité
3. Loi d'une variable aléatoire réelle, cas des lois uniformes et de la loi de Bernoulli
4. Loi d'un couple de variable aléatoire. Récupération de la loi de X à partir de la loi du couple (X, Y) .

II.2 Probabilités conditionnelles

Définition, formule des probabilités composées (proba d'une intersection) , formule des probabilités totales.

II.3 Indépendance d'évènements

Cas de deux évènements, puis de n évènements. Si A et B indep, alors A et $\overline{B}$ indep.

II.4 Indépendance de variables aléatoires

1. Définition et première propriété : des variables $X_1, \dots, X_n$ sont dites (mutuellement) indépendantes si pour tout $x_1 \in X_1(\omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$:

$$P([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n]) = P(X_1 = x_1) \dots P(X_n = x_n).$$

Si X et Y sont indépendantes, alors pour toute partie A de $X(\Omega)$ et toute partie B de $Y(\Omega)$, on a : $P([X \in A] \cap [Y \in B]) = P(X \in A)P(Y \in B)$.

2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et X et Y sont indépendantes, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m + n, p)$. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent une même loi de Bernoulli de paramètre p , la variable aléatoire $X = X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p .
3. Propriétés sur l'indépendance :
 - (a) Si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes (se généralise à n variables)
 - (b) Toute sous-famille (d'au moins deux variables) d'une famille de variables aléatoires indépendantes est encore une famille de variables aléatoires indépendantes.
 - (c) Propriété des coalitions : si $X_1, \dots, X_n$ sont indep, alors les coalitions $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes

III Espérance et variance d'une variable aléatoire finie

III.1 Espérance d'une variable aléatoire

1. Définition
2. Espérance des lois usuelles : uniforme, Bernoulli, binomiale
3. Propriétés : Linéarité, théorème de transfert. Positivité et croissance. Espérance d'une indicatrice
4. Si X et Y indépendantes, $E(XY) = E(X)E(Y)$. Généralisation à n variables.

III.2 Variance et covariance

1. Définition $V(X) = E((X - E(X))^2)$ et propriétés : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ et $V(aX + b) = a^2V(X)$
2. Variance des lois usuelles
3. Covariance : $\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Notion de variables corrélées.
4. Expression de la variance d'une somme à l'aide la covariance. Variance d'une somme de variables indépendantes.

III.3 Inégalités de concentration

Inégalités de Markov et de Tchebychev.