

**Programme de colle n°1 de la semaine n°3 du 18/09 au 22/09**

## Démonstrations de cours

- irrationalité de  $\sqrt{2}$
- si  $x$  est un réel, la suite  $(a_n)$  définie par  $a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$  converge vers  $x$ .
- Si  $0 \leq a \leq b$  et  $0 \leq c \leq d$ , alors  $ac \leq bd$ . Le résultat ne subsiste pas si les nombres sont de signe quelconque.
- Résoudre  $\sqrt{x} = x - 2$  et  $\sqrt{x} \geq x - 2$
- Résoudre  $\frac{x+5}{x^2-1} \geq 0$
- Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ , on a  $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ .
- $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$
- Résoudre  $[3x - 2] = 8$  et  $|3x - 2| \leq 8$ .
- $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  si  $q \neq 1$  et vaut  $n + 1$  si  $q = 1$ .
- $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$  et  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$  par récurrence
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \left(\frac{j(j+1)}{2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j+1) = \dots$

## Exercices

On pourra interroger sur les notions suivantes.

### Chapitre I: Calculer et comparer dans un monde numérique

## I Quels nombres dans un monde numérique ?

1. Les différents ensembles de nombre :  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ .
2. Décomposition d'un entier en base 2
3. Densité des rationnels et des irrationnels parmi les réels

## II Quelques techniques pour comparer des nombres

1. Opérations sur les inégalités
2. Utilisation de tableau de signes, d'études de fonctions
3. Valeur absolue et inégalité triangulaire
4. Quelques inégalités classiques :
  - $\forall x \geq 0, \sin x \leq x$
  - $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$
  - $\forall x > 0, \ln x \leq x - 1$  et  $\forall x > -1, \ln(1 + x) \leq x$ .
  - $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

## III Quelques techniques sur les sommes

1. Utilisation du symbole sigma
2. Quelques sommes classiques : sommes géométriques, somme des entiers de 1 à  $n$  et somme de leurs carrés. Factorisation de  $a^n - b^n$  par  $a - b$
3. Initiation au changement d'indice, séparation des termes d'indice pair et impair
4. Sommes à double indice