Programme de colle semaine 26 du 07/04 au 11/04

«Représentation des applications linéaires par des matrices»

Questions de cours

1. matrice dans les bases canoniques de l'application transposition de $\mathcal{M}_{3,2}(K)$ dans $\mathcal{M}_{2,3}(K)$
2. relation matricielle de changement de base : si A et A' codent une même AL, alors $A = QA'P^{-1}$, avec Q et P des matrices de passage
3. Si deux matrices sont semblables, elles ont la même trace.

I Représentation d'un application linéaire par une matrice

I.1 Matrice d'une application linéaire

Écriture de la matrice d'une AL dans un couple de base. Notion d'application linéaire canoniquement associée à une matrice.

I.2 Un véritable dictionnaire

Correspondance entre opérations sur les applications linéaires ($+$ et $\circ$) et opérations sur les matrices ($+$ et $\times$).

Une AL u est bijective, ssi sa matrice A est inversible (et on a A^{-1} qui est la matrice de f^{-1}). Si A et X sont les matrices respectives de l'AL u et du vecteur x, alors AX est la matrice du vecteur $u(x)$.

L'application $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est ainsi un isomorphisme entre les espaces vectoriels $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Une application matricielle : si une matrice carrée admet une inverse à gauche (ou à droite), alors elle est inversible.

I.3 Notion de rang d'une matrice

1. Le rang de A est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes. Il est aussi égal au rang de toute application linéaire représentée par A par rapport à n'importe quel couple de base.
2. Propriétés :
   - Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ on a $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n,p)$.
   - Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est inversible ssi $\mathrm{rg}(A) = n$.
   - Le rang d'une matrice n'est pas modifié si on la multiplie par une matrice inversible.

II Changements de base

II.1 Matrices de passage

Matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: c'est la matrice $\text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. Elle est égale aussi à $\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{id}_E)$. Elle est donc inversible et son inverse est $\text{Pass}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$.

II.2 Formules de changement de bases

- Pour une AL : $A = QA'P^{-1}$, qui s'écrit $A = PDP^{-1}$ dans le cas d'un endomorphisme.
- Pour un vecteur : $X = PX'$ ou $X' = P^{-1}X$ avec $P = \text{Pass}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Exemple «ma première réduction» : réduction de u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

II.3 Applications des changements de base

En trouvant de «bonnes bases», les objets géométriques (vecteurs ou applications linéaires) ont des représentations numériques plus simples qui facilitent les calculs :

- réduction de coniques en prenant une base polaire.
- calculs de puissances et de racines carrées de matrices
- calculs de commutants
- classification des matrices à équivalence et à similitude près (cf section suivante).

III Classification des matrices

III.1 Matrices semblables

- Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBP^{-1}$.

  Cela revient à dire que A et B codent un même endomorphisme mais dans une base éventuellement différente.

  La relation «matrices semblables» est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Si deux matrices sont semblables, alors elles ont même trace, même déterminant, même rang. Les réciproques sont fausses.

III.2 Matrices équivalentes

- Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes s'il existe deux matrices inversibles $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $A = PBQ$. Cela revient à dire que A et B codent une même application linéaire mais relativement à deux couples de base (éventuellement) différents.

  La relation «matrices équivalentes» est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Représentant d'une matrice de rang r : Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Alors A est équivalente à la matrice bloc $J_r = \operatorname{diag}(I_r, 0)$.

- Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes ssi elles ont même rang. Conséquence : une matrice et sa transposée ont même rang. Le rang d'une matrice est aussi égal au rang de ses vecteurs lignes.

IV Matrices d'opérations élémentaires, application au calcul de rang

1. Notion d'opérations élémentaires. Interprétation d'une opération élémentaire par un produit matriciel.

2. Application au calcul de rang. Une opération élémentaire ne modifie pas le rang. Pivot de Gauss.