Programme de colle S25 du 01/04 au 05/04

«Dimension finie»

Questions de cours

1. Dans un ev de dimension finie n, une famille de n vecteurs est une base ssi elle est libre ssi elle est génératrice.
2. si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F de dim finie, alors $\text{rg}(f) \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.
3. Si f et g endomorphismes de E, alors $\text{rg}(f+g) \leqslant \text{rg}(f)+\text{rg}(g)$ (car $\text{Im}(f+g) \subset \text{Im}\, f+\text{Im}\, g$, puis Grassman...)
4. Théorème du rang
5. si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et que $\dim E = \dim F$, alors il y a équivalence entre f injective, f surjective et f bijective
6. Existence et unicité des polynômes interpolateurs de Lagrange avec l'isomorphisme $P \mapsto (P(x_0), ..., P(x_n))$ est un

I Dimension d'un espace vectoriel

Définitions, théorème de la base incomplète, lemme de Steinitz. Existence de base.

Dimension des ev de référence.

Equivalence entre libre, génératrice et base pour des familles de n vecteurs en dimension n.

II Relations entre les dimensions

1. Cas d'un sev F de E. On a $F = E$ ssi $\dim F = \dim E$. Existence de supplémentaire en dim finie. Une AL de E dans F est un isomorphisme ssi elle transforme une base de E en base de F. Si $f : E \to F$ linéaire $\dim f(E) \leqslant \dim E$ et il y a égalité ssi f est un isomorphisme. Tout $\mathbb{K}$-ev de dim n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. Deux $\mathbb{K}$-ev de dim finie sont isomorphes ssi ils ont la même dimension.
2. Dimension d'une somme directe. Formule de Grassmann. Caractérisation d'une somme directe en dim finie.
3. $\dim E \times F = \dim E + \dim F$ et de $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

III Rang

1. rang d'une famille de vecteurs, cas où elle est libre. Rang d'une AL. Le rang de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est inférieur à $\dim E$ **et** à $\dim F$. Le rang est inchangé si l'on compose par un isomorphisme et diminué sinon.
2. théorème du rang. Corollaire : équivalence entre f bijective, injective, surjective lorsque f est une AL entre deux ev de même dim finie.

IV Hyperplans et équations cartésiennes de sev

Définition en tant que noyau d'une forme linéaire non nulle. Caractérisation en dimension finie à l'aide d'une droite supplémentaire, ou de la dimension

L'intersection de p hyperplans de E est au moins de dimension $n-p$. Réciproquement, si F est un sev de dimension $n-p$, il est l'intersection de p hyperplans. Les équations de ces p hyperplans constituent une équation cartésienne de F.