Programme de colle S24 du 24/03 au 29/03

«Limites, continuité, et dérivabilité»

Questions de cours

1. Théorème de la limite de la dérivée.
2. Étude des extrema locaux de $f(x) = x^4 - x^3 + 1$ (il y a 2 points critiques 0 et $\frac{3}{4}$, mais 0 pas extremum local car $f(x) - 1 \sim_0 -x^3$ et $\frac{3}{4}$ est un extremum local car $f''(3/4) \neq 0$ et donc par Taylor-Young $f(3/4 + h) - f(3/4) \sim \frac{f''(3/4)}{2}h^2$).
3. Une fonction k -LIP sur I est continue sur I . La réciproque est fausse (par exemple $f(x) = x^2$ n'est pas k -LIP sur $\mathbb{R}$).
4. $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.
5. Dans un ev de dimension finie n , une famille de n vecteurs est une base ssi elle est libre ssi elle est génératrice.
6. Soit $f \in L(E, F)$ avec E et F de dimensions finies. Alors f est bijective ssi f transforme une base de E en base de F .

Exercices

On interrogera sur les deux chapitres suivants :

1. Limites et continuité
2. Dérivabilité

1 Les limites**2 Continuité****3 Dérivabilité****3.1 Généralités**

1. Définition : f dérivable en a si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$ est finie. On note $f'(a)$ cette limite, qui est le coefficient directeur de la tangente en a .

Si f est dérivable, alors f est continue mais réciproque fausse (CEX : racine carrée ou valeur absolue en 0).

2. Opérations sur les fonctions dérivables :

- stable par combinaison linéaire, produit, quotient, composée

- soit $f : I \rightarrow J$ bijective et dérivable. Si f' ne s'annule pas, alors f^{-1} dérivable sur J et $f'^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

3. Dérivées successives :

- Notion de fonction de classe C^k . Opérations sur les fonctions de classe C^k . Cas d'une fonction réciproque
- formule de Leibniz pour dériver n fois le produit fg

3.2 Grands théorèmes

1. Théorème des points critiques : si f dérivable admet un extremum local en a un point intérieur, alors $f'(a) = 0$. Réciproque fautive, CEX : $f(x) = x^3$

2. Le théorème de Rolle «machine à fabriquer des zéros de f' » : soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors f' s'annule entre a et b .

3. Les accroissements finis :

- théorème : si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Interprétation graphique.
- inégalité : Soit f une fonction dérivable sur I telle que f' est bornée sur I par M . Alors pour tout a et b dans I , on a $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$
C'est un outil à fabriquer des fonctions $K - LIP$. Lorsque que $K \in [0, 1[$, cela permet d'étudier des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Application : lien entre variation et signe de la dérivée. Une nouveauté : si $f' \geq 0$ et que f' ne s'annule pas sur tout un intervalle ouvert (moralement f' s'annule peu), alors f strictement croissante.

4. Le théorème de la limite de la dérivée :

▷ Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- Si $\lim_{x \rightarrow b} f'(x) = l \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en b et $f'(b) = l$ (on a même f est de classe C^1 en b).
- Si $\lim_{x \rightarrow b} f'(x) = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en b , mais la courbe de f admet une tangente verticale au point d'abscisse b .

Exemple : étudier la dérivabilité de la fonction $x \mapsto \arcsin(1 - x^2)$.

Le corollaire suivant est très pratique pour prouver la classe C^1 : soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^1 sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = m \in \mathbb{R}$, alors f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur I en posant $f(a) = l$ et on a $f'(a) = m$.