Programme de colle S23 du 17/03 au 2/03

«Limites, continuité, et «presque toute» la dérivabilité»

Questions de cours

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue qui admet une limite finie en $+\infty$. Alors f est bornée.
2. Théorème des points critiques : si f dérivable admet un extremum local en a un point intérieur, alors $f'(a) = 0$.
3. Le théorème de Rolle.
4. Théorème des accroissements finis.

Exercices

On interrogera sur les deux chapitres suivants :

1. Limites et continuité
2. Une grosse partie du chapitre «dérivabilité» jusqu'au paragraphe «accroissements finis» inclus (correspond aux exos de 1 à 22 sur ma feuille d'exos). **Ne pas interroger** sur le théorème de la limite de la dérivée et sur le théorème de prolongement de classe C^1.

1 Les limites

2 Continuité

3 Dérivabilité

3.1 Généralités

1. Définition : f dérivable en a si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l$ est finie. On note $f'(a)$ cette limite, qui est le coefficient directeur de la tangente en a.

   Si f est dérivable, alors f est continue mais réciproque fausse (CEX : racine carrée ou valeur absolue en 0).
2. Opérations sur les fonctions dérivables :
   - stable par combinaison linéaire, produit, quotient, composée
   - soit $f : I \to J$ bijective et dérivable Si f' ne s'annule pas, alors f^{-1} dérivable sur J et $f'^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.
3. Dérivées successives :
   - Notion de fonction de classe C^k. Opérations sur les fonctions de classe C^k. Cas d'une fonction réciproque
   - formule de Leibniz pour dériver n fois le produit fg

3.2 Grands théorèmes

1. Théorème des points critiques : si f dérivable admet un extremum local en a un point intérieur, alors $f'(a) = 0$. Réciproque fausse, CEX : $f(x) = x^3$

2. Le théorème de Rolle «machine à fabriquer des zéros de f'» : soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors f' s'annule entre a et b.

3. Les accroissements finis :

   - théorème : si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Interprétation graphique.
   - inégalité : Soit f une fonction dérivable sur I telle que f' est bornée sur I par M. Alors pour tout a et b dans I, on a $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$

     C'est un outil à fabriquer des fonctions $K - LIP$. Lorsque que $K \in [0, 1[$, cela permet d'étudier des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
   - Application : lien entre variation et signe de la dérivée. Une nouveauté : si $f' \geqslant 0$ et que f' ne s'annule pas sur tout un intervalle ouvert (moralement f' s'annule peu), alors f strictement croissante.

Fin du programme pour la semaine

---

4. Le théorème de la limite de la dérivée :

   ▷ Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $[a, b[$.

   - Si $\lim\limits_{x \to b} f'(x) = l \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en b et $f'(b) = l$ (on a même f est de classe C^1 en b).
   - Si $\lim\limits_{x \to b} f'(x) = \pm\infty$, alors f n'est pas dérivable en b, mais la courbe de f admet une tangente verticale au point d'abscisse b.

   Exemple : étudier la dérivabilité de la fonction $x \mapsto \arcsin(1 - x^2)$.

   Le corollaire suivant est très pratique pour prouver la classe C^1 : soit $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^1 sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \to a} f'(x) = m \in \mathbb{R}$, alors f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur I en posant $f(0) = l$ et on a $f'(a) = m$.