Programme de colle S20 du 11/02 au 15/02

`Début sur les espaces vectoriels et les applications linéaires`

Dans tout le cours, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Questions de cours

1. l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ bornées est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Mais pas l'ensemble des fonctions croissantes.
2. $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E ssi tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme une CL des vecteurs $e_1,\dots,e_n$.
3. les endomorphismes de $\mathbb{R}$ sont les fonctions linéaires $x \mapsto kx, \quad k \in \mathbb{R}$
4. les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ sont les applications de la forme $(x,y) \mapsto (ax+by, cx+dy)$
5. si $f : E \to F$ linéaire, $\operatorname{Ker} f$ est un sev de E et $\operatorname{Im} f$ un sev de F
6. f injective ssi $\operatorname{Ker} f = \{0\}$

Exercices

La difficulté doit rester raisonnable cette semaine, on pourra vérifier la bonne acquisition des concepts ci-dessous listés dans le **Savoir Faire**. Pour les colleurs du mardi, garder à l'idée que le cours a été seulement terminé le vendredi précédent.

Savoir-Faire

1. Montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel (4 méthodes) :
   - montrer que c'est un sev d'un ev de référence
   - montrer F est égal à un Vect
   - montrer c'est l'intersection de sev
   - montrer que c'est le noyau d'une application linéaire
2. Manipuler la définition de Vect qui est un **ensemble** de combinaisons linéaires (et pas un vecteur).
3. Montrer qu'une famille est libre ou liée. Cela conduit souvent à résoudre un système linéaire. Dans le cas d'une famille de fonctions (ne pas hésiter à évaluer, à dériver ou prendre des limites). Dans le cas de familles à n vecteurs, souvent une récurrence.
4. Déterminer une base d'un ev E. On commence par chercher une famille génératrice, puis on regarde si cette famille est libre. Sinon, on enlève un vecteur de la famille génératrice...
5. Montrer qu'une application f est linéaire.
6. Déterminer une base du noyau ou de l'image d'une AL.
7. Démontrer qu'une AL est injective en montrant que son noyau est réduit à zéro

I Notion d'espace vectoriel

- définition de $\mathbb{K}$-ev, règles de calcul.
- ev de références : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- Notion de sous-ev
- Opérations sur les espaces vectoriels : intersection de sev, produit de $\mathbb{K}$-ev

II Familles génératrices, familles libres, bases

II.1 Familles génératrices

- définition de famille génératrice. Propriétés
- Notation $\operatorname{Vect}(A)$. C'est le plus petit sev de E contenant A.

II.2 Familles libres et familles liées

Définition et caractérisation. Propriétés

II.3 Bases et coordonnées

- définition d'une base : famille libre et génératrice
- bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- caractérisation d'une base en terme d'unicité écriture comme CL, notion de coordonnées.

III Applications linéaires

III.1 Vocabulaire

- Définition d'application linéaire, d'endomorphisme, d'isomorphisme et de forme linéaire
- Exemples

III.2 Les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$

Ce sont les applications de la forme $(x,y) \mapsto (ax+by, cx+dy)$, ce qui s'écrit matriciellement

$$X \mapsto AX \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Exemples géométriques : symétries, projections, homothéties, dilatations, rotation

III.3 Noyau et image d'une AL

- Définition
- $\operatorname{Ker} f$ est un sev de E et $\operatorname{Im} f$ un sev de F
- f injective ssi $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et f surjective ssi $\operatorname{Im} f = F$.
- Si $(x_1, \ldots, x_n)$ engendre E, alors $\operatorname{Im} f$ est engendré par $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$
- Une combinaison linéaire ou une composée d'AL est encore une AL. Si de plus f est bijective, alors f^{-1} est bijective. Groupe linéaire $GL_(E)$.

La semaine prochaine, suite et fin avec les sommes de sev, les projecteurs et les symétries vectorielles.

IV Sommes de sev

Notion de somme de deux sev et de somme directe. Espaces supplémentaires.

V Endomorphismes remarquables

1. projections vectorielles et projecteurs. $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ supplémentaires
2. symétries vectorielles $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $\operatorname{Ker}(f + \mathrm{id})$ supplémentaires.
3. homothéties, translation.