Colle de la semaine 19 du 04/02 au 8/02 : développements limités

Nous allons voir comment approximer localement une fonction par une fonction polynomiale, ce qui nous fournira un outil très efficace de calculs de limites, ou d'équivalents...

Dans tout le chapitre I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point et $\overline{I}$ l'intervalle I auquel on ajouté éventuellement ses bornes (on dit que $\overline{I}$ est l'adhérence de I).

Questions de cours

1. DL en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$
2. DL en 0 de $\ln(1+x)$ et $\arctan x$.
3. DL_5 en 0 de arccos en intégrant celui de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4. DL_{2n} de cos à l'aide de la formule de Taylor-Young (on utilise que $\cos^{(k)}(x) = \cos(x+\frac{k\pi}{2})$).
5. $x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ et sa courbe est au-dessus de l'asymptote.

I Généralités

- Notion de voisinage, de fonction négligeable.
- Notion de développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ (en abrégé DL_n) en x_0
- Unicité des coefficients et troncature
- Cas des fonctions paires et impaires
- Lien entre DL et équivalent

II Développements limités usuels en 0

- On peut se ramener au voisinage de 0 avec $h = x - a$.
- on peut intégrer les DL
- la formule de Taylor-Young : si f de classe C^n sur I avec $a \in I$, alors f admet un DL_n en a. Application aux fonctions : exp, ch, sh, cos, sin et $x \mapsto (1+x)^\alpha$.
- Réciproque fausse, mais si f définie en a, équivalence entre DL_0 et continuité, puis entre DL_1 et dérivabilité.

III Opérations sur les DL

Somme, produit, composée, quotient.

IV Applications des DL

- Calcul de limites, recherche d'équivalents
- Étude locale d'une fonction : prolongement, dérivabilité, position de la tangente par rapport à la courbe
- Étude des branches infinies, recherche d'asymptotes obliques et position.

La semaine suivante : espaces vectoriels et applications linéaires