Programme de colle S18 du 28/01 au 02/02

Structures algébriques

Questions de cours

1. L'ensemble $\mathbb{U}$ des complexes de module 1 est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
2. Si H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, il est de la forme $a\mathbb{Z}$.
3. Si f est un morphisme, alors $f(e_G) = e_H$ et $\forall x \in G,\ f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.
4. L'ensemble des nombres décimaux est un sous-anneau de $\mathbb{R}$ mais n'est pas un corps.

I - Notion de groupe

1. Définition, groupes de références
   - pour la loi $+$: $(\mathbb{C},+),\ (\mathbb{R},+),\ (\mathbb{Z},+)$. L'élément neutre est 0.
   - pour la loi $\times$: $(\mathbb{C}^*,\times),\ (\mathbb{R}^*,\times),\ (\mathbb{U},\times)$. L'élément neutre est 1.
   - pour la loi $\circ$: l'ensemble $(S_E,\circ)$ des bijections de E dans E est un groupe. L'élément neutre est l'application identité id_E.
   - pour la loi $\times$: le groupe $(GL_n(\mathbb{K}),\times)$ des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'élément neutre est la matrice unité I_n.
2. Règles de calcul dans un groupe $(G,*)$:

   Notations multiplicatives et additives. Cas des itérés $x^n = x * x * \cdots * x$ et $x^{-n} = (x^n)^{-1}$

   Inverse d'un produit, $x^n * x^m$ et simplification par x.
3. Sous-groupes
4. Notion de morphisme

   Définition et exemples. Image du neutre et d'un symétrique. Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme. Image $\operatorname{Im} f$ et noyau $\operatorname{Ker} f$ d'un morphisme f. Condition d'injectivité. Isomorphisme.

II - Notion d'anneau

1. Définition et anneaux de références
   - $(\mathbb{Z},+,\times),\ (\mathbb{R},+,\times),\ (\mathbb{Q},+,\times),\ (\mathbb{C},+,\times)$
   - $(\mathbb{K}[X],+,\times)$
   - $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\times)$

- $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

2. Règles de calcul dans un anneau, groupe des inversibles d'un anneau,

3. Sous-anneau, notion d' anneau intègre

III - Notion de corps

Un corps est un anneau commutatif dans lequel tout élément non nul est inversible.
Corps de référence : $(\mathbb{C},+,\times)$, $(\mathbb{R},+,\times)$, $(\mathbb{Q},+,\times)$.
Tout corps est intègre.