Colle de la semaine 17 du 21/01 au 26/01 : calcul matriciel

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Attention désormais la transposée d'une matrice A se note $A^\top$.

Questions de cours

1. $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$
2. Le produit de 2 matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure.
3. Si A et B sont inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
4. Si A est inversible, alors $A^\top$ est inversible et $(A^\top)^{-1} = {A^{-1}}^\top$.
5. Une matrice nilpotente n'est pas inversible.
6. toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

I Généralités

1 Opérations sur les matrices

- Combinaison linéaire et produit de matrices. Propriétés algébriques : bilinéarité et associativité du produit matriciel.
- Matrices diagonales, matrice unité I_n, notation : $\operatorname{Vect}\{A_1, \ldots, A_p\}$ pour l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices $A_1, \ldots, A_p$

2 Quelques particularités de ce produit

Le produit n'est pas commutatif, il existe des matrices nilpotentes, donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas un «anneau» intègre. La matrice I_2 admet une infinité de racines carrées

3 Matrices élémentaires

Définition, toute matrice est combinaison linéaire de matrices élémentaires. Produit de deux matrices élémentaires.

II Quelques techniques et outils matriciels

1 Puissances et polynômes de matrice

1. Définitions de puissance et de polynôme de matrice. Un polynôme en A commute avec A.

2. Quelques recettes de calcul de puissances n-ièmes

(a) Si D est diagonale avec $D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_p)$, alors $D^n = \mathrm{diag}(d_1^n, \dots, d_p^n)$.

(b) Utilisation du binôme de Newton : si A et B **commutent**,

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

En particulier calcul de $(\lambda I_p + N)^n$ avec N nilpotente.

(c) Utilisation de récurrence, par exemple avec la matrice Attila (que des 1) :

(d) Utilisation d'un polynôme annulateur P de A , en faisant la division euclidienne de X^n par P.

(e) L'astuce de type «Pacman» $(PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$

2 La trace d'une matrice

Définition, linéarité et $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Cas particulier de la taille 2 : si A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, le polynôme $P = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$ est un polynôme annulateur de A :

3 Matrices symétriques et transposée d'une matrice

Définitions de matrice symétrique, antisymétrique, de transposée. Linéarité de la transposée, transposée d'un produit. Une combinaison linéaire de matrices symétriques (resp. antisymétrique) est encore une matrice symétrique (resp. antisymétrique).

4 Produits de matrices triangulaires et de matrices blocs

- Une somme et un produit de matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure. Si A est inversible et triangulaire supérieure, alors A^{-1} est triangulaire supérieure.
- Produits de matrices blocs du type $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$

III Le groupe des matrices inversibles

- Définition, unicité de l'inverse. Le produit de deux matrices inversibles A et B est encore inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Théorème : A est inversible ssi pour toute colonne b le système $Ax = b$ admet une unique solution. Application au calcul d'inverses.
- Cas de la taille 2 : A inversible ssi $\det A \neq 0$ et alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

- Utilisation d'un polynôme annulateur pour calculer l'inverse