

Colle de la semaine 16 du 14/01 au 18/01

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Au niveau arithmétique des polynômes, j'ai juste parlé de divisibilité et d'irréductibilité. Je n'ai pas parlé de polynômes premiers entre eux, de théorème de Gauss ou de Bezout (je le ferai quand je parlerai de décomposition en éléments simples pour les fractions rationnelles).

Questions de cours sur les polynômes

1. unicité du couple (Q, R) dans la division euclidienne.
2. Déterminer les polynômes P de degré 4 tels que $P(0) = P(1) = 1, P(2) = 4, P(3) = 9$ et $P(4) = 16$ (réponse : $P - X^2$ s'annule en 1, 2, 3, 4 donc de la forme $\lambda(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$ puis $\lambda = \frac{1}{4!}$ avec $P(0) = 1$).
3. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de $P \in \mathbb{R}[X]$ de multiplicité r , alors $\bar{\alpha}$ est aussi racine de P de multiplicité r (en utilisant la caractérisation de la multiplicité par les dérivées successives).
4. décomposer $X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ en cherchant les racines complexes (l'astuce $X^4 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2$ permettant de factoriser rapidement ne m'intéresse pas ici).

1 L'anneau des polynômes**1.1 Polynômes et opérations**

- Définition, combinaison linéaire et produit de polynômes
- Degré, définition, degré d'un produit, d'une somme, d'une composée. Intégrité de $\mathbb{K}[X]$.
- Substitution, notion de fonction polynomiale associée à un polynôme
- notion de fraction rationnelle

2 La division euclidienne de $\mathbb{K}[X]$

- notion de divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, si A divise B non nul, $\deg A \leq \deg B$.
- Théorème de la division euclidienne.

3 Racines et factorisation

- Le nombre $a \in \mathbb{K}$ est racine de P ssi $X - a$ divise P .
- Notion de racine multiple

- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ admet $a_1, \dots, a_p$ pour racines de multiplicité $r_1, \dots, r_p$, alors $(X - a_1)^{r_1} \dots (X - a_p)^{r_p}$ divise P .
En particulier, si P est non nul, la somme des multiplicités des racines est majorée par le degré
- Un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui admet $n + 1$ racines est nul. En particulier, un polynôme qui admet une infinité de racines est nul.
- Notion de polynôme scindé (cela dépend du corps $\mathbb{K}$)

4 Dérivation

- Définition, opérations sur les dérivées. Degré d'une dérivée
- Formule de Taylor, expression des coefficients en fonction des dérivées successives.
- Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les dérivées successives.

5 Relations coefficients racines pour les polynômes scindés

Notion de fonctions symétriques élémentaires en $x_1, \dots, x_n$:

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}.$$

C'est la somme des produit de k racines distinctes et ordonnées.

Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k = a_n (X - x_1) \times \dots \times (X - x_n)$ un polynôme scindé de degré $n \geq 1$. On a

$$P = a_n (X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n)$$

D'où $\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$.

6 Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ ou $\mathbb{R}[X]$

- Notion de polynôme irréductible
- Théorème de D'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine complexe.
- Décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$: tout polynôme P non constant est produit de polynômes de degré 1. On dit que P est scindé sur $\mathbb{C}$.
- Décomposition en facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$: comme produit de polynômes de degré 1 ou de degré 2 à $\Delta < 0$.