Programme de colle de la semaine 14 du 16/12 au 20/12

`Suites numériques, suite et fin`

Questions de cours

1. Soit $f : I \to I$ croissante. Alors la suite u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$ est monotone.
2. Une suite (z_n) de nombres complexes converge ssi les suites réelles $(\mathrm{Re}(z_n))$ et $(\mathrm{Im}(z_n))$ convergent.
3. Un entier est divisible par 9 ssi la somme de ses chiffres est divisible par 9.
4. Théorème de Gauss : si $a \mid bc$ et $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$, alors $a \mid c$ (à partir de Bezout...)
5. Si $d \in \mathbb{N}$ est un entier qui n'est pas un carré, alors $\sqrt{d}$ est irrationnel.
6. L'ensemble des nombres premiers est infini.

I Comportement global d'une suite

Notion de suite majorée, croissante, stationnaire.

II Comportement asymptotique d'une suite

1. Notion de suite convergente et divergente. Unicité de la limite. Une suite convergente est bornée.
2. Suites tendant vers l'infini. Elles sont divergentes

III Opérations sur les limites

1. Opérations algébriques
2. Limites et relation d'ordre.
   (a) Passage à la limite dans les inégalités. .
   (b) Existence de limites par encadrement : Théorème des gendarmes et théorèmes de comparaison
   (c) Croissances comparées : $a^n << n! << n^n$, c'est-à-dire : $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ et $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.

IV Suites et monotonie

1. *Théorème de la limite monotone* : toute suite croissante et majorée converge.
   Si u est croissante et n'est pas majorée, alors la suite u tend vers $+\infty$.
2. Suites adjacentes, définition et théorème.

V Suites extraites

Définition. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et converge vers la même limite. Application à la divergence de suites.

Proposition : Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite l, alors (u_n) converge vers l.

On sait qu'une suite bornée ne converge pas forcément. On a toutefois le résultat important suivant :

Théorème de Bolzano Weierstrass : si u est une suite réelle bornée, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge.

VI Quelques méthodes sur les suites récurrentes

1. Quelques «trucs» pour étudier les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$
   - On cherche les intervalles I stables par f, c'est à dire tels que $f(I) \subset I$ (pour cela, on dresse le tableau de variations de f). Dans ce cas, si $u_0 \in I$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.
   - On cherche les points fixes de f qui sont les limites candidates pour u. En effet, si $f : I \to I$ est continue, et que u converge vers $l \in I$, alors l est un point fixe de f, c'est-à-dire $f(l) = l$.
   - Le signe de $f(x) - x$ sur I permet d'obtenir la monotonie de u.
   - Le résultat suivant est classique mais à priori hors-programme : si I est stable par f et que f est croissante sur I, alors u est monotone. .
2. Formule explicite pour une suite arithmético-géométrique.

   Si u est définie par $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$, alors en notant α le point fixe de $f(x) = ax + b$, on a $v_n = u_n - \alpha$ qui est géométrique de raison a.
3. Formules explicites pour une suite récurrente linéaire d'ordre deux du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

VII Suites de nombres complexes

Définition. Prop : (z_n) CV ssi $(\mathrm{Re}(z_n))$ et $(\mathrm{Im}(z_n))$ CV

Le théorème de Bolzano Weierstrass est encore vrai pour les suites de nombres complexes.