

Programme de colle de la semaine 13 du 09/12 au 13/12

Suites numériques

Questions de cours

1. Unicité de la limite
2. Une suite convergente est bornée. Réciproque fausse
3. Combinaison linéaire de suites convergentes
4. Si u est croissante et non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.

I Comportement global d'une suite

Notion de suite majorée, croissante, stationnaire.

II Comportement asymptotique d'une suite

1. Notion de suite convergente et divergente. Unicité de la limite. Une suite convergente est bornée.
2. Suites tendant vers l'infini. Elles sont divergentes

III Opérations sur les limites

1. Opérations algébriques
2. Limites et relation d'ordre.
 - (a) Passage à la limite dans les inégalités. .
 - (b) Existence de limites par encadrement : Théorème des gendarmes et théorèmes de comparaison
 - (c) Croissances comparées : $a^n \ll n! \ll n^n$, c'est-à-dire : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

IV Suites et monotonie

1. *Théorème de la limite monotone* : toute suite croissante et majorée converge.
Si u est croissante et n'est pas majorée, alors la suite u tend vers $+\infty$.
2. Suites adjacentes, définition et théorème.

V Suites extraites

Définition. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente et converge vers la même limite. Application à la divergence de suites.

Proposition : Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite l , alors (u_n) converge vers l .

On sait qu'une suite bornée ne converge pas forcément. On a toutefois le résultat important suivant :

Théorème de Bolzano Weierstrass : si u est une suite réelle bornée, alors on peut en extraire une sous-suite qui converge.