Programme de colle de la semaine 12 du 03/12 au 06/12

I Questions de cours

1. on note $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$. Pas injectif, ni surjectif. $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^+$.
2. on pose $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ définie par $f(z) = \exp(z)$. Pas injectif mais surjectif. $f^{-1}(\mathbb{U}) = i\mathbb{R}$
3. Démontrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$ est bijective et déterminer son application réciproque.
4. La composée de 2 injections (resp. surjections, resp. bijections) est une injection (resp. surjection, resp. bijection).
5. $g \circ f$ injective implique f injective et $g \circ f$ surjective implique g surjective.
6. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ avec $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
7. Démontrer que $\mathbb{U}_8 \subset \mathbb{U}_{16}$. Il n'y a pas égalité car les ensembles n'ont pas le même nombre d'éléments.

II Vocabulaire de théorie des ensembles

1. Vocabulaire : ensemble, éléments, parties, inclusions, ensemble vide
2. Opérations sur les ensembles : union, intersection, complémentaire, différence. Règles de calculs
3. Produit cartésien

III Généralités sur les applications

1. Vocabulaire : $f : E \to F$, image, antécédent, ensemble image $f(A)$, ensemble image réciproque (noté $f^{-1}(B)$ ou $f^{\leftarrow -1}(B)$)
2. Notion de composée, associativité, application identité
3. Notion d'injection, surjection et bijection. Stabilité par composée
4. Inverse de bijection : notion d'application réciproque.

   Lemme : $g \circ f$ injective implique f injective et $g \circ f$ surjective implique g surjective.

   Caractérisation du caractère bijectif de f par l'existence de g telle que $f \circ g = \mathrm{id}$ et $g \circ f = \mathrm{id}$.

   Fonction réciproque de $g \circ f$.

La semaine prochaine : début du chapitre «suites numériques»