

Programme de colle de la semaine 11 du 26/11 au 30/11
Équations différentielles

Attention, la notion de raccord pour une ED n'est plus au programme, ce n'est donc pas une priorité. Tout exercice portant sur ce genre de problématique devra être guidé.

Questions de cours

1. Les solutions de $y' + ay = 0$ sont $\{\lambda e^{-A} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ avec A primitive de a
2. Les solutions de l'équation avec second membre $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière les solutions de l'équation homogène.
3. Méthode de la variation de la constante : recherche d'une solution particulière de $y' + a(x)y = b(x)$ sous la forme $y_p(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$, alors $\lambda' = be^A$.
4. Trouver les fonctions dérivables f vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(-x)$ (si f solution, alors f' est dérivable et $f'' + f = 0$...)
5. trouver les fonctions f dérivables sur $]0, +\infty[$ vérifiant $\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, f(xy) = f(x) + f(y)$ (si f est solution, alors en dérivant par rapport à x , on a $f'(xy)y = f'(x)$, d'où en prenant $x = 1$, $f'(y) = \frac{f'(1)}{y}$, donc $f(y) = a \ln y + b$, puis $f(y) = a \ln y$ car $f(1) = 2f(1) = 0$).

I Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1. EDL d'ordre 1 homogène

Les solutions de $y' + ay = 0$ sont $\{\lambda e^{-A} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ avec A primitive de a

2. EDL d'ordre 1 avec second membre.

Les solutions de l'équation avec second membre $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière les solutions de l'équation homogène.

Méthode de la variation de la constante : recherche d'une solution particulière de $y' + a(x)y = b(x)$ sous la forme $y_p(x) = \lambda(x)e^{-A(x)}$, alors $\lambda' = be^A$.

3. Problème de Cauchy : il existe une **unique** solution définie sur I de $y' + a(x)y = b(x)$ avec a et b continues sur I vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$.

II Équations différentielles linéaires d'ordre 2

1. Résolution des EDL d'ordre 2 homogène à coefficients constants
2. Les solutions de l'équation avec second membre $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$ (E) s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière de (E) les solutions de l'équation homogène (H) $ay'' + by' + cy = 0$.
3. Comment trouver une solution particulière ? Quelques «recettes¹»

1. Ce sont les seules au programme.

- Cas d'un second membre polynomial, on cherche une solution polynomiale.
 - Cas d'un second membre de la forme $f(x) = e^{mx}$ avec $m \in \mathbb{K}$: l'équation (E) admet une solution particulière y_p de la forme :
 - $y_p(x) = qe^{mx}$ si m n'est pas racine de $aX^2 + bX + c$ avec $q \in \mathbb{K}$.
 - $y_p(x) = qx e^{mx}$ si m est racine simple de $aX^2 + bX + c$.
 - $y_p(x) = qx^2 e^{mx}$ si m est racine double de $aX^2 + bX + c$.
 - Principe de superposition
 - Cas d'un second membre de la forme $f(x) = \cos \omega x$. On cherche une solution complexe de l'équation $(E_c) : ay'' + by' + c = e^{i\omega x}$. On en prend la partie réelle et cela fournit une solution particulière de (E) .
4. Problème de Cauchy : il existe une **unique** solution de $ay'' + by' + cy = f(x)$ vérifiant les conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$.