Séance n°4 : kit de majoration

Objectifs

Voici quelques outils pour apprendre à comparer les nombres, donc des outils pour majorer.

1 Opérations sur les inégalités

Proposition 1 (Opérations sur les inégalités)

1. *On peut ajouter un nombre à une inégalité et on peut la multiplier par un nombre positif. Soit x et y dans $\mathbb{R}$. Alors*

$$\forall a \in \mathbb{R}, (x \leqslant y) \implies (\ a + x \leqslant a + y) \quad \textit{et} \quad \forall a \geqslant 0, (x \leqslant y) \implies (a \times x \leqslant a \times y).$$

2. *On peut sommer les inégalités et multiplier les inégalités entre nombres positifs. Soit a, b, c et d des réels. Alors*

$$(a \leqslant b \quad \textit{et} \quad c \leqslant d) \implies (a + c \leqslant b + d).$$

et

$$(0 \leqslant a \leqslant b \quad \textit{et} \quad 0 \leqslant c \leqslant d) \implies (a \times c \leqslant b \times d).$$

3. *Passage à l'inverse. Soit x et y des réels. On a*

$$0 < x \leqslant y \implies \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}.$$

4. *Majoration d'une fraction : Soit a, b, a' et b' des réels. On a*

$$(0 \leqslant a \leqslant a' \quad \textit{et} \quad b \geqslant b' > 0) \implies \frac{a}{b} \leqslant \frac{a'}{b'}.$$

Autrement dit pour majorer une fraction, on majore le numérateur et on minore son dénominateur.

Remarque : on ne peut pas soustraire des inégalités.

Exercice 1 Soit $x \in [-2, 3]$. On pose $A = 4x - 5x^3 + 8\cos(x)$. Démontrer par des encadrements que $-151 \leqslant A \leqslant 60$.

Exercice 2 On pose pour $x \in [4, 6]$, $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$.

1. Montrer que pour $x \in [4, 6]$, on a $3 \leqslant f(x) \leqslant 13$.

2. Justifier que $f(x) = 2 + \frac{7}{x-3}$, en déduire que $\frac{13}{3} \leqslant f(x) \leqslant 9$. Quel est l'encadrement le plus précis ?

Exercice 3 Démontrer que :

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{100}} \geqslant 10.$$

2 Utilisation de la valeur absolue et de l'inégalité triangulaire

Proposition 2 (Inégalité triangulaire) *Soit x et y des réels. On a :*

$$||x| - |y|| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$$

On a aussi $|x - y| \leqslant |x| + |y|$.

Exercice 4 (preuve de l'inégalité triangulaire) Soit x et y des réels.

1. Démontrer en élevant au carré que $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

2. En déduire que l'on a aussi $|x - y| \leqslant |x| + |y|$. Justifier que l'inégalité $|x - y| \leqslant |x| - |y|$ est fausse en général.

3. On reprend l'exercice 1 ci-dessus : soit $x \in [-2, 3]$ et $A = 4x - 5x^3 + 8\cos(x)$. Démontrer avec l'inégalité triangulaire que $|A| \leqslant 155$. En déduire un encadrement de A.

Exercice 5 Déterminer la limite de $\frac{2\cos x - 5}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Remarque : soit a et x des réels. Le nombre $|x - a|$ est la distance de x à a. Ainsi

$$(|x - a| = r \iff x = a \pm r) \quad \text{et} \quad (|x - a| \leqslant r \iff a - r \leqslant x \leqslant a + r).$$

3 Utilisation d'une fonction

Exercice 6 (Inégalité avec sinus)

1. Démontrer que :

$$\forall x \geqslant 0, \sin x \leqslant x.$$

2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de sinus au point d'abscisse 0, en déduire une interprétation graphique de l'inégalité ci-dessus.

Exercice 7 Démontrer par une étude de fonctions que :

$$\forall x > 0,\ x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

Faire ensuite une nouvelle preuve en multipliant l'inégalité cherchée par x.

4 Quelques inégalités classiques à connaître

Voici en vrac quelques inégalités classiques :

1. Inégalités de convexité

(a) $\forall x \geqslant 0, \sin x \leqslant x$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geqslant x + 1$

(c) $\forall x > 0, \ln x \leqslant x - 1 \quad \text{et} \quad \forall x > -1, \ln(1 + x) \leqslant x$.

2. Inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall a, b \geqslant 0, \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

3. Inégalité de Cauchy-Schwarz (plus tard dans l'année) Soit $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des réels

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

5 Quelques exercices consistants pour terminer

Exercice 8 (inégalité arithmético-géométrique) Soit a et b deux nombres positifs. On appelle moyenne géométrique de a et b, le nombre $\sqrt{ab}$.

1. Calculer la moyenne géométrique de 2 et 8. La comparer à la moyenne «classique», que l'on appelle aussi moyenne arithmétique.

2. Démontrer que :

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

3. La fortune de Crésus a été multipliée par 13 la première année et par 7 la deuxième année. Puisque 10 est la moyenne arithmétique de 7 et 13, peut-on affirmer qu'en moyenne, chaque année la fortune de Crésus a été multipliée par 10 ?

4. Un champ rectangulaire de dimensions a et b a la même aire qu'un disque de rayon r. Démontrer que le périmètre du disque est inférieur à celui du rectangle.

Exercice 9 (Un produit convergent) On considère la suite u définie par

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

1. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geqslant x + 1$ et interpréter graphiquement.

2. Démontrer que u est majorée. En déduire que u converge.

3. Programmer ensuite cette suite, pour estimer la limite.

Exercice 10 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des réels. On veut démontrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2.$$

On pose aussi :

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \; B = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \quad \text{et} \quad C = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, développer $f(x)$, exprimer le résultat en fonction de A, B et C.

2. En déduire de l'étude du signe de f, l'inégalité demandée.

3. Application : démontrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant n\sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$