Séance n°3 : nombres complexes

Ce qu'il faut savoir

Dans cette séance, nous utilisons comme prérequis le cours de terminale S sur les nombres complexes.

I Exercices

Exercice 1 (Choisir la bonne écriture) On pose $z = \sqrt{3} - i$.

1. Donner l'écriture trigonométrique de z.

2. En déduire l'écriture algébrique de z^{2017}.

Exercice 2 (Linéarisons)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})^3$, en déduire une linéarisation de $\cos^3 x$:

$$\cos^3 x = \frac{\cos(3x) + 3\cos x}{4}.$$

2. En déduire une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$.

Exercice 3 (Dessiner c'est gagner) Décrire et représenter l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

1. $3 \leqslant |z - 2e^{\frac{5i\pi}{6}}| \leqslant 5$. **2.** $|z-1| = |z|$ **3.** $\arg z^2 = \dfrac{4\pi}{3}\ [2\pi]$.

Exercice 4 (technique de l'angle moitié) Le but de l'exercice est d'obtenir une écriture trigonométrique pour un nombre de la forme $1 \pm \mathrm{e}^{i\theta}$.

1. Démontrer que $1 + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{7}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{14}} \times 2\cos\frac{\pi}{14}$. En déduire un argument de $1 + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{7}}$.

2. Démontrer que $1 - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{7}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{14}} \times -2i\sin\frac{\pi}{14}$. En déduire le module et un argument de $1 + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{7}}$.

3. Vision géométrique : soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On note A le point d'affixe $\mathrm{e}^{i\theta}$, B le point d'affixe $1+\mathrm{e}^{i\theta}$. On note O l'origine du repère et I le point d'affixe 1.

- **(a)** Donner la nature du quadrilatère $OABI$.
- **(b)** En déduire en fonction de θ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB})$. Que peut-on en déduire pour le nombre complexe $1 + \mathrm{e}^{i\theta}$?

Exercice 5 (Valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$) Pour $k \in \{, \dots, 4\}$, on pose $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$.

1. Justifier que $w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 0$.

2. Exprimer ensuite $1 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4$ à l'aide de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$. En déduire que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est une racine du polynôme $4X^2 + 2X - 1$ puis donner la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$.