Séance n°2 : Kit de trigonométrie

Objectifs et Motivation

La trigonométrie n'est en général pas très appréciée par les lycéens. Il est vrai que les programmes actuels lui réservent une toute petite place... Pourtant, la trigonométrie est incontournable en mathématiques et plus généralement dans les sciences. Comment programmer une rotation sur un jeu vidéo ? Comment prévoir la trajectoire d'un satellite autour d'une planète... ? Le nombre π peut même surgir lorsqu'on ne s'y attend pas :

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

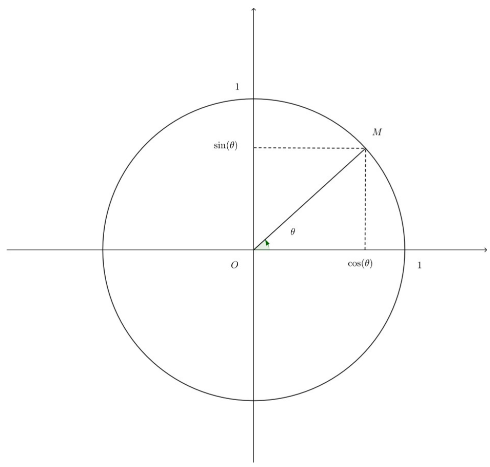
L'objectif ce texte est d'apprendre et comprendre les relations trigonométriques «fondamentales» en les redémontrant et les manipulant. Il faut s'entraîner ! ! Cet apprentissage sera complété lors de la séance suivante sur les nombres complexes.

I Démonstration des premiers résultats

En «caricaturant», on pourrait dire que la trigonométrie se résume à trois points :

- Un tour complet mesure 2π radians.
- Les nombres $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont les coordonnées du point M du cercle trigonométrique d'angle polaire θ.
- Si a et b sont des réels, on a

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\cos b-\sin a\sin b\\ \sin(a+b) &= \sin a\cos b+\sin b\cos a.\end{aligned}$$



1. Vérifier que vous savez placer sur une feuille quadrillée les points du cercle trigonométrique d'angle polaire[1] $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ et π, et compléter le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$					
$\sin x$					
$\tan x$					

2. Relation fondamentale entre cos et sin : justifier à l'aide d'un théorème du collège que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

1. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Le cercle trigonométrique noté $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1. On dit qu'un point M de $\mathcal{C}$ a pour angle polaire θ (mesuré en radians), si θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

3. Angles associés : en vous servant du cercle trigonométrique, compléter les relations suivantes :

(a) $\cos(x+2\pi) = ...$	**(b)** $\cos(-x) = ...$	**(c)** $\cos(x+\pi) = ...$
(d) $\cos(x-\pi) = ...$	**(e)** $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = \pm\sin(...)$	**(f)** $\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \pm\sin(...)$
(g) $\sin(x+2\pi) = ...$	**(h)** $\sin(-x) = ...$	**(i)** $\sin(x+\pi) = ...$
(j) $\sin(x-\pi) = ...$	**(k)** $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \pm\cos(...)$	**(l)** $\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \pm\cos(...)$

4. Équations trigonométriques

Comprendre et/ou lire sur le cercle les relations suivantes :

$$\cos a = \cos b \quad \Leftrightarrow \quad (a = b \mod 2\pi) \quad \text{ou} \quad (a = -b \mod 2\pi) \tag{1}$$
$$\sin a = \sin b \quad \Leftrightarrow \quad (a = b \mod 2\pi) \quad \text{ou} \quad (a = \pi - b \mod 2\pi) \tag{2}$$

Et pour l'équation $\cos a = \sin b$? Et bien on se ramène à l'un des cas précédents en utilisant par exemple que $\sin b = \cos(\dfrac{\pi}{2} - b)$.

II Autour des formules d'addition

La relation $\mathrm{e}^{i(a+b)} = \mathrm{e}^{ia}\mathrm{e}^{ib}$ entre nombres complexes se retient facilement. En identifiant les parties réelles (resp. imaginaires), on retrouve alors les formules d'addition du cosinus (resp. de sinus) rappelée ci-dessus.

1. Compléter, et démontrer les relations suivantes :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \tag{3}$$
$$\cos(a-b) = \cos(a+(-b)) = \tag{4}$$
$$\sin(a+b) = \tag{5}$$
$$\sin(a-b) = \tag{6}$$

2. Formules de duplication (on double l'angle)

Déduire des formules d'addition, les formules de duplication suivantes :

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \tag{7}$$
$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x \tag{8}$$

3. Les formules de linéarisation :

il s'agit de transformer un produit de fonctions trigonométriques en une combinaison linéaire (ou somme) de fonctions trigonométriques :

Démontrer, puis compléter à l'aide des formules d'addition ci-dessus les relations suivantes :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) \tag{9}$$
$$\cos a \sin b = ... \tag{10}$$
$$\sin a \sin b = ... \tag{11}$$

III Le point de vue fonctionnel : les fonctions cosinus et sinus

Dresser les tableaux de variations et dessiner l'allure de leur courbe. Rappeler leur dérivée.

Remarques :

- la fonction tangente sera étudiée en exercice.
- un signal périodique peut être modélisé par des combinaisons linéaires de fonctions sinusoïdales. Une fonction $f : t \mapsto A\cos(wt + \phi)$ représente un signal d'amplitude A et de pulsation $w > 0$ avec une phase ϕ. Sa période est $T = \frac{2\pi}{w}$. Par exemple l'onde sonore correspondant au «la fondamental» de fréquence 440 hertz peut être modélisée par la fonction $t \mapsto \sin(2\pi \times 440t)$.

IV Exercices

Exercice 1 Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ les équations $2\cos(2x) + 1 = 0$ et $\cos x = \sin(3x)$ (il y a quatre solutions à la première équation).

Exercice 2 Trouver une valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$ à l'aide d'une formule de duplication.

Exercice 3 On considère la fonctions f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}.$$

1. Vérifier que f est impaire, en déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$.

2. Justifier que f est dérivable et que sa dérivée est du signe de $2\cos x + 1$. Terminer l'étude de f.

Exercice 4 (Fonction tangente) On définit la fonction tangente notée tan par :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

1. Donner l'ensemble de définition de tan puis vérifier que tan est impaire et π-périodique.

Il suffit donc de l'étudier sur $I = [0, \frac{\pi}{2}[$.

2. Justifier que tan est dérivable sur I, et démontrer que :

$$\forall x \in I, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3. Terminer l'étude de tan et donner sa représentation graphique.

Exercice 5 (Linéariser pour mieux intégrer) Le but de cet exercice est de calculer des intégrales de fonctions trigonométriques.

1. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\,\mathrm{d}x$.

2. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ (la difficulté est qu'on ne connaît pas de primitive de $\cos^2$. Comme il est plus simple d'intégrer une somme qu'un produit, l'idée est de transformer le produit $\cos^2$ en somme (on linéarise) : pour cela il suffit «d'inverser» la formule de duplication du cos).

3. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos 2x\,\mathrm{d}x$ (on pourra utiliser une formule de linéarisation).

4. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\cos(3x)\,\mathrm{d}x$ (on pourra utiliser une formule de linéarisation).

Pour terminer

Exercice 6 (Divergence de la suite $(\cos n)_n$) Nous allons démontrer que la suite de terme général $\cos n$ est divergente.

1. Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\cos(n+1) + \cos(n-1) = 2\cos(n)\cos(1).$$

2. En déduire que si $\cos n$ tend vers un réel l, alors $l = 0$.

3. Conclure à une absurdité en utilisant la formule de duplication du cosinus (expression de $\cos 2n$ à l'aide $\cos n$).

Exercice 7 (Un défi) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que :

$$\prod_{k=0}^{n} \cos(2^k x) = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{\sin(2^{n+1}x)}{\sin x}$$