**Séance n°1 : kit de démarrage**

## Objectifs

- manipulation de puissances et de factorielles
- manipulation des sommes et des produits et notamment du symbole $\sum$.

## Ce qu'il faut savoir

Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des réels ou des nombres complexes, on pose :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} x_k = x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n.$$

Le symbole $\sum$ est la lettre grecque majuscule «sigma».

En sortie du lycée, vous devez connaître les deux sommes suivantes :

- la somme des entiers de 1 à $n$ :

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- les sommes géométriques : si $q$ est un réel ou un nombre complexe différent de 1, on a pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

  Plus généralement, on pourra retenir que la somme $S$ des termes consécutifs d'une suite géométrique vaut :

$$S = \frac{\text{1er terme } - \text{suivant du dernier}}{1 - \text{ raison}}.$$

Par exemple, $5^3 + 5^4 + \cdots + 5^{32} + 5^{33} = \frac{5^3 - 5^{34}}{1-5}$.

# I Quelques grands nombres

**Exercice 1 (Base deux et puissances)** En informatique, on manipule beaucoup les puissances de deux comme par exemple $2^{32}$ ou $2^{64}$. Pour obtenir un ordre de grandeur de ces grands nombres, on utilise l'approximation suivante :

$$2^{10} = 1024 \approx 10^3.$$

**1.** Donner à l'aide cette approximation, **sans utiliser de calculatrice** une estimation de l'entier $2^{64}$ (on donnera une estimation sous forme d'écriture scientifique[1]).

1. Par exemple, l'écriture scientifique de 4526300 est $4.5263 \times 10^5$

**2.** Comment représenter un entier sur un ordinateur ? En base 10, on a $523 = 5 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0$. En base 7, on a $(523)_7 = 5 \times 7^2 + 2 \times 7^1 + 3 \times 7^0 = (262)_{10}$. En base deux, on utilise seulement deux chiffres 0 et 1 (on les appelle des bits) : par exemple, on a $(1011)_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11$.

**(a)** Écrire l'entier 21 en base deux.

**(b)** Quel est le plus grand entier naturel que l'on puisse écrire avec 64 bits (c'est-à-dire 64 chiffres en base deux) ?

**Exercice 2 (Découverte des factorielles)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle «factorielle $n$» noté $n!$, l'entier $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ avec la convention $0! = 1$.

Par exemple, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 = 4 \times 3!$.

**1.** Écrire le nombre $15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11$ comme un quotient de deux factorielles.

**2.** Exprimer à l'aide de factorielles et de puissances les deux produits suivants :

$$2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 100 \quad \text{et} \quad 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 99.$$

**3.** Soit $n \geqslant 2$ un entier, simplifier la fraction suivante $\frac{n!}{(n-2)!}$.

**4.** Comparer sans calculatrice, les nombres $64!$, $2^{64}$ et $64^{64}$.

**5.** Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot «fleur» ? Et du mot «totati» ?

**Exercice 3 (Additionner des nombres positifs pour obtenir de grandes sommes)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

**1.** Calculer pour $n \geqslant 2$ la somme suivante, puis déterminer sa limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ :

$$G_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

**2.** Paul m'a dit : «en ajoutant indéfiniment des nombres positifs, on obtient des sommes aussi grandes que l'on veut». L'affirmation de Paul est-elle vraie ?

Chloé m'a dit : «en ajoutant indéfiniment des nombres de plus en plus proches de 0, on ne peut pas obtenir de somme très grande».

Voici un exemple, permettant de réfléchir à l'affirmation de Chloé.

**3.** On pose pour $n \geqslant 1$, $S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $S_n \geqslant \sqrt{n}$. En déduire la limite de la suite $(S_n)$.

L'affirmation de Chloé est-elle vraie ?

Sophie m'a dit «si la somme de tous les termes d'une suite donne une valeur finie, alors cette suite tend vers 0».

**4.** On note $(u_n)$ une suite, et pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

**(a)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire $S_n - S_{n-1}$ à l'aide de $u_n$.

**(b)** On suppose que la suite $(S_n)$ converge, démontrer que la suite $(u_n)$ converge vers 0. L'affirmation de Sophie est-elle vraie ?

# II Manipulation des symboles $\Sigma$ et $\Pi$

**Exercice 4 (Manipulation du symbole sigma)** Soit $n \geqslant 1$ un entier et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_n$ et $\lambda$ des réels. Les égalités suivantes sont-elles vraies ?

**1.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$ **2.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \sum_{i=1}^{n} y_i$ **3.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda x_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$

**4.** $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \prod_{i=1}^{n} x_i + \prod_{i=1}^{n} y_i$ **5.** $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i y_i = \prod_{i=1}^{n} x_i \times \prod_{i=1}^{n} y_i$ **6.** $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda x_i = \lambda \prod_{i=1}^{n} x_i$

**Exercice 5 (Quelques calculs)**

**1.** Écrire la somme suivante à l'aide du symbole $\Sigma$, puis la calculer

$$S = 58 + 61 + 64 + \cdots + 451 + 454$$

**2.** Calculer les sommes suivantes :

$$S = \sum_{k=1}^{n} n, \quad S = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \quad \text{et} \quad S = \sum_{i=0}^{n} 5^{3i-2}.$$

**3.** somme télescopique : soit $k \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que :

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}.$$

En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}.$$

**Exercice 6 (La somme des carrés des entiers)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

**1.** Factoriser l'expression $2n^2 + 7n + 6$.

**2.** En déduire par récurrence sur l'entier $n$ que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**3.** En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(6k+2)$.

**Exercice 7 (Sommes doubles)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $S$ la somme des coefficients de la matrice suivante avec $n$ lignes et $n$ colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & n-1 & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$$

Par exemple, si $n = 4$, on a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On peut écrire la somme $S$ comme une «somme de sommes», en sommant par paquets de lignes ou paquets de colonnes. Compléter les écriture suivantes :

$$S = \sum_{i=\cdots}^{\cdots} \sum_{j=\cdots}^{\cdots} i = \sum_{j=\cdots}^{\cdots} \sum_{i=\cdots}^{\cdots} i.$$

Calculer enfin la valeur de $S$.