Séance n°3 : nombres complexes

Ce qu'il faut savoir

Dans cette séance, nous utilisons comme prérequis le cours de terminale S sur les nombres complexes.

I Exercices

Exercice 1 (Choisir la bonne écriture) On pose $z = \sqrt{3} - i$.

1. Donner l'écriture trigonométrique de z. Soit θ un argument de z.

On a $|z| = 2$, puis $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{-1}{2}$.

Ainsi $\theta = \frac{-\pi}{6}$ et $z = 2\mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{6}}$.

2. En déduire l'écriture algébrique de z^{2017}.

On a donc

$$z^{2017} = 2^{2017}\mathrm{e}^{\frac{i2017\pi}{6}} = 2^{2017}\mathrm{e}^{-i\left(336\pi+\frac{\pi}{6}\right)} = 2^{2017}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

Explication : $2017 = 6 \times 336 + 1$

Conclusion :

$$z^{2017} = 2^{2017}\frac{1}{2} - i2^{2017}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On retiendra que l'écriture trigonométrique ou exponentielle est adaptée aux calculs de produits ou de quotients.

Exercice 2 (Linéarisons)

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})^3$, en déduire une linéarisation de $\cos^3 x$:

$$\cos^3 x = \frac{\cos(3x) + 3\cos x}{4}.$$

Nous allons utiliser que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Ainsi

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right)^3 &= \mathrm{e}^{i3x} + 3\mathrm{e}^{i2x}\mathrm{e}^{-ix} + 3\mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}{-i2x} + \mathrm{e}^{-i3x}\\ &= (\mathrm{e}^{i3x} + \mathrm{e}^{-i3x}) + 3(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})\\ &= 2\cos(3x) + 6\cos x\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\cos^3 x = \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(2\cos 3x + 6\cos x) = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x).$$

2. En déduire une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$. Il est plus simple de primitiver des sommes que des produits.

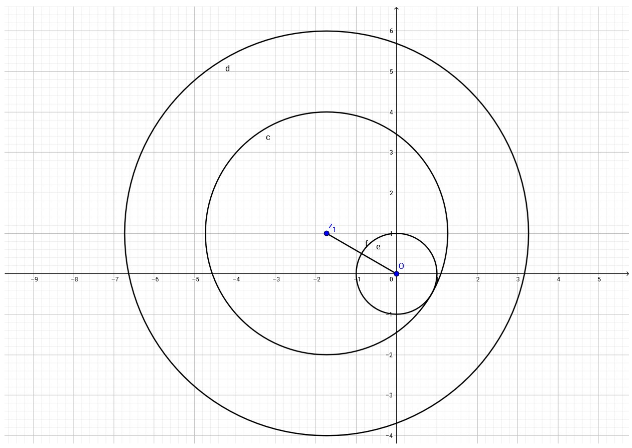
Une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$ est donc

$$x \mapsto \frac{1}{4}(\frac{\sin 3x}{3} + 3\sin x).$$

Exercice 3 (Dessiner c'est gagner) Décrire et représenter l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

1. $3 \leqslant |z - 2e^{\frac{5i\pi}{6}}| \leqslant 5$. **2.** $|z-1| = |z|$ **3.** $\arg z^2 = \dfrac{4\pi}{3}\ [2\pi]$.

1. Pour le premier ensemble, si on note A le point d'affixe $2e^{5i\frac{\pi}{6}}$, l'ensemble cherché est la couronne comprise entre le cercle de centre A et de rayon 3 et le cercle de centre A et de rayon 5.



2. Soit A le point d'affixe 1 et O le point d'affixe 0. On note M le point d'affixe z. Alors $|z-1| = |z| \iff AM = OM$, donc M décrit la médiatrice du segment $[AB]$, c'est donc la droite verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$.

3. On a

$$\left(\arg z^2 = \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]\right) \iff \left(2\arg z = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right) \iff \left(z = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right).$$

Ainsi M décrit la droite d'angle polaire $\frac{2\pi}{3}$ privé du point O (le nombre complexe 0 n'admet pas d'argument).

Exercice 4 (technique de l'angle moitié) Le but de l'exercice est d'obtenir une écriture trigonométrique pour un nombre de la forme $1 \pm e^{i\theta}$.

1. Démontrer que $1 + e^{i\frac{\pi}{7}} = e^{i\frac{\pi}{14}} \times 2\cos\frac{\pi}{14}$. En déduire un argument de $1 + e^{i\frac{\pi}{7}}$.

On a

$$1 + e^{i\frac{\pi}{7}} = e^{i\frac{\pi}{14}}\left(e^{i\frac{\pi}{14}} + e^{-i\frac{\pi}{14}}\right) = e^{i\frac{\pi}{14}} \times 2\cos\frac{\pi}{14}.$$

Comme $2\cos\frac{\pi}{14} >$, on en déduit que $1 + e^{i\frac{\pi}{7}}$ a pour argument $\frac{\pi}{14}$ et pour module $2\cos\frac{\pi}{14}$.

2. Démontrer que $1-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{7}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{14}} \times -2i\sin\frac{\pi}{14}$. En déduire le module et un argument de $1+\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{7}}$.

On a
$$1-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{7}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{14}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{14}}-\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{14}}\right) = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{14}} \times -2i\sin\frac{\pi}{14}.$$

Comme $\arg z_1z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$, on obtient que :

$$\arg 1-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{7}} = \arg \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{14}} + \arg -2i\sin\frac{\pi}{14} = \frac{\pi}{14}-\frac{\pi}{2} = \frac{-3\pi}{7}.$$

De même, on a $\left|1-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{7}}\right| = 2\sin\frac{\pi}{14} > 0$.

3. Vision géométrique : soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On note A le point d'affixe $\mathrm{e}^{i\theta}$, B le point d'affixe $1+\mathrm{e}^{i\theta}$. On note O l'origine du repère et I le point d'affixe 1.

(a) Donner la nature du quadrilatère $OABI$. C'est un parallélogramme avec deux côtés consécutifs de même longueur ($OA = OB = 1$), c'est donc un losange.

Ainsi ses quatre côtés ont même longueur. De plus dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu, on en déduit que la droite (OB) est une médiane du triangle OAI qui est isocèle en P. La droite (OB) est donc aussi une bissectrice de l'angle en 0, ainsi $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\theta}{2}$, et donc $1+\mathrm{e}^{i\theta}$ a pour argument $\frac{\theta}{2}$.

Exercice 5 (Valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$**)** Pour $k \in \{,\dots,4\}$, on pose $w_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}}$.

1. Justifier que $S = w_0+w_1+w_2+w_3+w_4 = 0$.

C'est une somme géométrique de raison $\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}$. Ainsi

$$S = \frac{1-\left(\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}\right)^5}{1-\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}} = \frac{1-\mathrm{e}^{i2\pi}}{1-\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}} = \frac{1-1}{1-\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}} = 0.$$

2. Exprimer ensuite $1+w_1+w_2+w_3+w_4$ à l'aide de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$. En déduire que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est une racine du polynôme $4X^2+2X-1$ puis donner la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Un schéma permet de préssentir, que w_1 et w_4 sont conjugués ainsi que w_2 et w_3. Les calculs suivants le prouvent.

On a

$$\begin{aligned}
w_1 &= \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}\\
w_2 &= \mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{5}}\\
w_3 &= \mathrm{e}^{\frac{6i\pi}{5}} = \mathrm{e}^{i(\frac{6\pi}{5}-2\pi)} = \mathrm{e}^{i(\frac{6\pi}{5}-\frac{10\pi}{5})} = \mathrm{e}^{-i(\frac{4\pi}{5})}\\
w_4 &= \mathrm{e}^{\frac{8i\pi}{5}} = \mathrm{e}^{i(\frac{8\pi}{5}-2\pi)} = \mathrm{e}^{i(\frac{8\pi}{5}-\frac{10\pi}{5})} = \mathrm{e}^{-i(\frac{2\pi}{5})}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
1+w_1+w_1^2+w_1^3+w_1^4 &= 1+\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}+\mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{5}}+\mathrm{e}^{-i\left(\frac{4\pi}{5}\right)}+\mathrm{e}^{-i\left(\frac{2\pi}{5}\right)}\\
&= 1+\underbrace{\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{5}}+\mathrm{e}^{-i\left(\frac{2\pi}{5}\right)}}+\underbrace{\mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{5}}+\mathrm{e}^{-i\left(\frac{4\pi}{5}\right)}}\\
&= 1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}\\
&= 1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos(2\times\frac{2\pi}{5})\\
&= 1+2\cos\frac{2\pi}{5}+2\left(2\cos^2\frac{2\pi}{5}-1\right)\\
&= 1+2\cos\frac{2\pi}{5}+4\cos^2\frac{2\pi}{5}-2\\
&= -1+2\cos\frac{2\pi}{5}+4\cos^2\frac{2\pi}{5}
\end{aligned}$$

Ceci montre d'après la question 1. que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est une racine du polynôme $4X^2+2X-1$.

Or ce polynôme a pour racines $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$. Mais $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}<0$ tandis que $\cos\frac{2\pi}{5}>0$ car $\frac{2\pi}{5}\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Ainsi on a

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}.$$