Éléments de corrigé de la séance n°1 : kit de démarrage

I Quelques grands nombres

Exercice 1 (Base deux et puissances) En informatique, on manipule beaucoup les puissances de deux comme par exemple 2^{32} ou 2^{64}. Pour obtenir un ordre de grandeur de ces grands nombres, on utilise l'approximation suivante :

$$2^{10} = 1024 \approx 10^3.$$

1. Donner à l'aide cette approximation, **sans utiliser de calculatrice** une estimation de l'entier 2^{64} (on donnera une estimation sous forme d'écriture scientifique[1]).

On a :

$$2^{64} = 2^4 \times 2^{60} = 16 \times (2^{10})^6 \approx 16 \times (10^3)^6 = 16 \times 10^{18} = 1.6 \times 10^{19}.$$

2. Comment représenter un entier sur un ordinateur ? En base 10, on a $523 = 5 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0$. En base 7, on a $(523)_7 = 5 \times 7^2 + 2 \times 7^1 + 3 \times 7^0 = (262)_{10}$. En base deux, on utilise seulement deux chiffres 0 et 1 (on les appelle des bits) : par exemple, on a $(1011)_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11$.

(a) Écrire l'entier 21 en base deux.
On a $21 = 16 + 4 + 1 = 2^4 + 2^2 + 1 = (10101)_2$.

(b) Quel est le plus grand entier naturel que l'on puisse écrire avec 64 bits (c'est-à-dire 64 chiffres en base deux) ? Son écriture binaire est $(11\dots11)_2$ avec 64 bits. Son successeur est $(100\dots00)_2$ avec 64 zéros. Ce nombre vaut 2^{64}. Donc le plus grand entier naturel codé sur 64 bits est $2^{64} - 1$.

Exercice 2 (Découverte des factorielles) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle «factorielle n» noté $n!$, l'entier $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ avec la convention $0! = 1$.

Par exemple, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 = 4 \times 3!$.

1. Écrire le nombre $15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11$ comme un quotient de deux factorielles.

On a :

$$15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times \cdots \times 2 \times 1}{10 \times 9 \times \cdots \times 2 \times 1} = \frac{15!}{10!}$$

2. Exprimer à l'aide de factorielles les deux produits suivants :

$$2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 100 \quad \text{et} \quad 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 99.$$

On a

$$P = 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 100 = (2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \cdots \times (2 \times 50) = 2^{50} \times 50!.$$

Enfin, on pose $Q = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 99$. On remarque que $P \times Q = 100!$, donc

$$Q = \frac{100!}{P} = \frac{100!}{2^{50} \times 50!}.$$

1. Par exemple, l'écriture scientifique de 4526300 est 4.5263×10^5

3. Soit $n \geqslant 2$ un entier, simplifier la fraction suivante $\frac{n!}{(n-2)!}$.

On a
$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times 1 = n(n-1)(n-2)!.$$

Donc $\frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1)$.

4. Comparer sans calculatrice, les nombres $64!$, 2^{64} et 64^{64}.

Ces trois nombres sont des produits de 64 entiers ! ! Il est clair que 64^{64} est le plus grand car chaque facteur est 64, donc supérieur ou égal aux facteurs des deux autres nombres.

De même,
$$64! = (1 \times 2 \times 3 \times 4) \times (5 \times \cdots \times 64) > 2^4 \times 2^{60} = 2^{64}.$$

Conclusion : $2^{64} < 64! < 64^{64}$.

On verra cette année, que pour n entier assez grand, une suite géométrique du type q^n est «négligeable» devant $n!$ qui est elle même «négligeable» devant n^n.

5. Il y a $5!$ anagrammes du mot «fleur» et $\frac{6!}{3!}$ du mot «totati».

Exercice 3 (Additionner des nombres positifs pour obtenir de grandes sommes) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer pour $n \geqslant 2$ la somme suivante, puis déterminer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$:
$$G_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

La somme G_n est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, on a
$$G_n = \frac{\frac{1}{4} - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}.$$

Comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, $(\frac{1}{2})^{n+1}$ tend vers 0 et donc G_n tend vers $\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

2. Paul m'a dit : «en ajoutant indéfiniment des nombres positifs, on obtient des sommes aussi grandes que l'on veut». L'affirmation de Paul est-elle vraie ?

Non, comme le montre la somme précédente. On ajoute certes des nombres positifs et notre somme grandit, mais les nombres que l'on ajoute sont de plus en plus petits...

Chloé m'a dit : «en ajoutant indéfiniment des nombres de plus en plus proches de 0, on ne peut pas obtenir de somme très grande».

Voici un exemple, permettant de réfléchir à l'affirmation de Chloé.

3. On pose pour $n \geqslant 1$, $S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $S_n \geqslant \sqrt{n}$. En déduire la limite de la suite (S_n).

Le nombre S_n est une somme de n termes. Le plus petit de ces n termes est $\frac{1}{\sqrt{n}}$, donc on a :
$$S_n \geqslant n \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

On en conclut par comparaison que S_n tend vers $+\infty$, malgré le fait que les nombres $\frac{1}{\sqrt{n}}$ que l'on rajoute tendent vers 0. L'affirmation de Chloé n'est donc pas vraie.

Sophie m'a dit «si la somme de tous les termes d'une suite donne une valeur finie, alors cette suite tend vers 0».

4. On note (u_n) une suite, et pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $S_n - S_{n-1} = u_n$.

(b) On suppose que la suite (S_n) converge vers l. Alors la suite (S_{n-1}) converge aussi vers l, donc par différence de limites, on a $S_n - S_{n-1}$ qui tend vers $l - l = 0$. Ainsi la suite (u_n) converge vers 0. L'affirmation de Sophie est donc vraie.

II Manipulation des symboles Σ et Π

Exercice 4 (Manipulation du symbole sigma) Soit $n \geqslant 1$ un entier et $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_n$ et λ des réels. Les égalités suivantes sont-elles vraies ?

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$ **2.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \times \sum_{i=1}^{n} y_i$ **3.** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda x_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$

4. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \prod_{i=1}^{n} x_i + \prod_{i=1}^{n} y_i$ **5.** $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i y_i = \prod_{i=1}^{n} x_i \times \prod_{i=1}^{n} y_i$ **6.** $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda x_i = \lambda \prod_{i=1}^{n} x_i$

Écrivons la première somme avec des «petits-points». On a

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = (x_1 + y_1) + \cdots + (x_n + y_n) = (x_1 + \cdots + x_n) + (y_1 + \cdots + y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

C'est donc vrai.

La deuxième est fausse, en effet

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \times \sum_{i=1}^{n} y_i = (x_1 + \cdots + x_n)(y_1 + \cdots + y_n).$$

Or en développant $(x_1 + \cdots + x_n)(y_1 + \cdots + y_n) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n + \textit{d'autres termes}$. Un contre-exemple nous suffit donc pour conclure :

$$21 = (1+2) \times (3+4) \neq 1 \times 3 + 2 \times 4 = 11.$$

On montre de la même façon que les égalités 3) et 5) sont vraies.

L'égalité 4) est fausse car par exemple :

$$\prod_{i=1}^{2}(1+1) = 2 \times 2 = 4 \neq \prod_{i=1}^{2} 1 \times \prod_{i=1}^{2} 1 = 1 \times 1 = 1.$$

Enfin l'égalité 6) est fausse, la bonne formule est :

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda x_i = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Exercice 5 (Quelques calculs)

1. Écrire la somme suivante à l'aide du symbole Σ, puis la calculer

$$S = 58 + 61 + 64 + \cdots + 451 + 454$$

On remarque que deux termes successifs de cette somme diffèrent de 3. On a $58 = 3\times 19+1$, $61 = 3 \times 20 + 1$ et $454 = 3 \times 151 + 1$. Cette somme s'écrit donc

$$S = \sum_{k=19}^{151} (3k+1).$$

Elle comporte $(151-19+1) = 133$ termes, donc $\displaystyle\sum_{k=19}^{151} 1 = 1+1+\cdots+1 = 133$. On en déduit

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=19}^{151}(3k+1) = 3\sum_{k=19}^{151} k + \sum_{k=19}^{151} 1 \\ &= 3\left(\sum_{k=1}^{151} k - \sum_{k=1}^{18} k\right) + 133 \\ &= 3\left(\frac{151\times 152}{2} - \frac{18\times 19}{2}\right) + 133 \\ &= 34048 \end{aligned}$$

Remarque : pour ceux qui connaissent, on aurait pu dire aussi que c'est une la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3, à ce titre cette somme vaut la moyenne des termes extrêmes multiplié par le nombre de termes, donc $\frac{58+454}{2} \times 133 = 34048$.

2. Calculer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} n, \quad S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \quad \text{et} \quad S_3 = \sum_{i=0}^{n} 5^{3i-2}.$$

Attention pour S_1, il y a un piège (ne pas confondre avec $\sum_{k=1}^{n} k$), on a $S_1 = n+n+\cdots+n = n \times n = n^2$.

On a ensuite puisque $\frac{1}{n}$ ne dépend pas du «compteur» k de la somme :

$$S_2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)}{2}.$$

Pour la somme S_3, il faut penser à une somme géométrique car

$$5^{3i-2} = \frac{5^{3i}}{5^2} = \frac{(5^3)^i}{25} = \frac{125^i}{25}$$

On a donc

$$S_3 = \frac{1}{25}\sum_{i=0}^{n} 125^i = \frac{1}{25} \times \frac{1-125^{n+1}}{1-125}.$$

3. somme télescopique : soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \\
&= \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Exercice 6 (La somme des carrés des entiers) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Factoriser l'expression $2n^2 + 7n + 6$. Le polynôme $P = 2X^2 + 7X + 6$ a pour discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 1$, il admet donc deux racines réelles -2 et $\frac{-3}{2}$ (on calcule $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$). Il se factorise donc sous la forme $2(X+2)(X+\frac{3}{2}) = (X+2)(2X+3)$. Ainsi

$$2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3).$$

2. En déduire par récurrence sur l'entier n que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Notons $HR(n)$ la propriété ci-dessus.

Initialisation : $HR(1)$ qui est vraie car $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$ et $\frac{1 \times (1+1) \times (2+1)}{2} = 1$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $HR(n)$ est vraie. On doit prouver que $HR(n+1)$ est vraie.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{d'après } HR(n) \\
&= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right) \\
&= (n+1)\left(\frac{n(2n+1) + 6n + 6}{6}\right) \\
&= (n+1)\left(\frac{2n^2 + 7n + 6}{6}\right) \\
&= (n+1)\frac{(n+2)(2n+3)}{6} \quad \text{d'après la question 1.} \\
&= \frac{(n+1)\left((n+1)+1\right)\left(2(n+1)+1\right)}{6}
\end{aligned}$$

Ceci prouve que $HR(n+1)$ est vraie et achève la preuve par récurrence.

3. En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} k(6k+2)$. On a en développant

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k(6k+2) &= 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k \\
&= 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n(n+1) \\
&= n(n+1)\left(2n+1+1\right) \\
&= 2n(n+1)^2.
\end{aligned}$$

Exercice 7 (Sommes doubles) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note S la somme des coefficients de la matrice suivante avec n lignes et n colonnes :

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\
0 & 2 & 2 & \dots & 2 \\
\vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & n-1 & n-1 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & n
\end{pmatrix}$$

Par exemple, si $n = 4$, on a

$$A = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 2 & 2 \\
0 & 0 & 3 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 4
\end{pmatrix}$$

On peut écrire la somme S comme une «somme de sommes», en sommant par paquets de lignes ou paquets de colonnes.On a :

$$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i.$$

Pour calculer S, il est plus simple de calculer la deuxième somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i = &= \sum_{j=1}^{n} \frac{j(j+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 + \sum_{j=1}^{n} j\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3} + 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1+3}{3}\right) \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}
\end{aligned}$$